th. Un.
212m - 3
Winterfeld

J. Gerstner.

<36635586010015

<36635586010015

Bayer. Staatsbibliothek

# Anfangsgründe
der
# Mathematik,
zum
Gebrauch in Schulen
und für
## Selbstlehrlinge.

---

Abgefasst
von
M. A. von Winterfeld,
königl. preussischen Major.

Dritter Teil,
welcher
die Fortsetzung der Geometrie
enthält.

---

Braunschweig
in der Schulbuchhandlung, 1799.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorrede.

In der LiteraturZeitung ist ein neuer Recensent meiner Arbeit aufgetreten. Er rühmt die Richtigkeit und Klarheit meines Vortrages, meint aber dennoch, die GesprächsForm sei nicht die schiklichste dazu. Wenn aber, wie ich dafür halte, Richtigkeit und Klarheit der höchste Zwekk eines guten Vortrags ist, und ich solchen, nach des Recensenten eignem Geständnisse erreicht habe, solte man daraus nicht vielmehr das Gegenteil schliessen, meine VortragsArt sei, die schiklichste, oder doch eine der schiklichsten? Der Recensent meint, sie sei nicht sokratisch. Gesetzt das wäre, was schadet es, wenn sie ihrem Zwekk entspricht? Omne talit punctum qui clare docuit. Aber was fehlt denn meinem Vortrage um sokra-

tisch zu seyu? Darüber erklärt der Rec. sich nicht bestimmt, scheint jedoch „das Abbrechen des Lehrers mitten in der Periode, und das vollends Aussprechen des Schülers" nicht dafür zu erkennen. Nun ist es zwar sehr leicht, diese VortragsForm, deren ich mich zur Kürze und Abwechselung zuweilen (nicht meistens, wie der Rec. sagt) bedient habe, zu vermeiden: daß sie aber keinesweges unsokratisch ist, davon kan sich jeder überzeugen, der sich die Mühe geben will, in Plato's sokratischen Gesprächen, das Gespräch Menon, (S. 57. der gedikischen Uebersetzung) nachzulesen. Welchen Stoff zum Lächeln würde ich dem Rec. nicht bereitet haben, wenn ich, wie Plato oft, und Moses MendelsSohn gewöhnlich tuht, den Lehrer die Resultate hätte selbst ziehn, und dan die Zustimmung des Schülers durch ein Nicht? oder ein bist du nicht auch dieser Meinung? u. dergl. hätte herausfodern lassen! *)

Ein

*) Diese sokratische VortragsArt scheint sogar mir etwas unsokratisch: denn es fält gar nicht schwer dadurch herauszubringen was man will, selbst falsche

Ein zweiter Einwurf welchen der Rec. mir macht, ist, die ziemlich überflüßige Lehre von den aritmetischen Proportionen mit zu vieler Umständlichkeit behandelt zu haben. Ich habe zwölf Seiten darauf verwandt. Das scheint mir, so lange man diese Lehre nicht für ganz überflüssig zu erklären wagt, nach meiner Einkleidung, nicht zu viel. Karsten hat, in seinem Lehrbegriff, acht Seiten dazu gebraucht, welche, wegen des grössern Formats, und engern Drukks, meinen zwölfen ohngefähr gleich kommen werden. Selbst Lorenz hat bei seiner gedrängten Kürze, und dem sparsamen Drukk sechstehalb Seiten darauf verwandt.



sche Resultate: wie sich davon ein Beispiel in dem jetzt angeführten Gespräche. Meuow findet, wo es S. 59 heisst: „Und dis HerausWikkeln deutlicher Ideen aus sich selbst ist ja eben WiederErinnerung?" Meyer antwortet sehr unbehutsam: „Allerdings." Und auf diese seyn sollende WiederErinnerung, auf dieses erschlichne Allerdings, läßt Plato nun den Sokrates sein LehrGebäude von Unsterblichkeit der Seele gründen!

Der dritte Einwurf ist: „den Exponenten „eines Verhältnisses als Quotienten des vor„hergehenden Gliedes durch das folgende darzu„stellen, ist den ältern, nicht den neuern Ma„thematikern gemäß." Da in der Geometrie Ansehn und Alter von keinem Gewichte sind; so scheint es sehr gleichgültig, ob eine Lehre den alten, oder den neuen Geometern gemäß ist, wenn sie nur richtig ist. Indessen scheint die Bemerkung des Recensenten nicht einmal gegründet: denn bei angestellter Nachforschung habe ich von Geometern auf meiner Seite gefunden: Wolfen, Segnern, Eulern, Karsten, Lorenzen, Eberten, Häselern, Schulzen, La Chapelle ꝛc. auf der entgegengesetzten aber nicht mehr als Alembert und Kästnern. Ehemals gehörte auch Lorenz zu diesen letzten, aber in der neuesten Ausgabe seiner Elemente ist er zu meiner Partei übergetreten.

Vierter Einwurf: „Ein verdoppeltes ver„dreifachtes Verhältniß sagt niemand, und un„ser Verfasser lehrt S. 62. etwas Falsches, „wenn er, auf diesen Ausdruck hindeutend,

„sagt

„sagt, 2 stehe gegen 1 in doppeltem, hinge„gen 4 gegen 1 in verdoppeltem Verhältnisse „von 2 gegen 1. Das ist eine Unterscheidung „die nur unser Verfasser nicht andre Mathema„tiker, machen, die, wo sie von doppeltem, „dreifachem, vielfachem Verhältnisse sprechen, „stets das darunter verstehn, was unser Vf. „verdoppelt, verdreifacht, vervielfacht genant „haben wil." — Ungeachtet ein Geometer sehr füglich einen Unterschied nötig finden könte, welcher Andre nicht gemacht haben, ohne deshalb ein Kezer zu seyn; so ist es doch hier nicht der Fall. Der von mir gemachte Unterschied ist von allen Geometern seit dem Euklides gemacht. Hier sind zu meiner Rechtfertigung die Aussprüche einiger allgemein für orthodox erkanten Geometer.

1) Wolf.

„Ratio *dupla* (vocatur) si exponens 2, *tripla* si 3, etc. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam." (Elem. arithm. §. 142.)

„Ratio ex duabus vel pluribus aliis composita dicitur, quam habet factum ex

duarum vel plurium rationum antecedentibus, ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8, et 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur quae ex duabus, *triplicata* quae ex tribus, *quadruplicata* quae ex quatuor, etc. et in genere *multiplicata* quae ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe unius cuiusque rationem similium. Ita 48 : 3, seu 16 : 1 est ratio *duplicata* ipsarum 4 : 1 et 12 : 3." (Ibid. §. 159.)

2) **Kästner.**

„Wenn p : q = q : s *), so ist p : s = p : q + p : q = 2 (p : q); oder zwei Mal so groß, die verdoppelte (duplicata, nicht dupla) von p : q." (Arithm. Cap. VI, §. 7.).

3) Be-

*) Bei dieser Gelegenheit merke ich, an, daß Prof. Hindenburg, für p : q + q : s, oder $\left(\begin{smallmatrix} p : q \\ q : s \end{smallmatrix}\right)$ schreibt (p : q) q : s). Campe Erläut. der kästner. AGr. T. I. S. 311); welche Bezeichnung allerdings charakterischer scheint, weil (p : q) (q : s) eigentlich (p : q) (q : s) $\times$ (q : s) bedeutet.

3) Belidor.

„Il faut prendre garde de ne point confondre la raison *doubléé* avec la raison *double*, ni la raison *triplée* avec la raison *triple*; car la raison *double* est une raison simple au lieu qu'une raison *doublée* est composée de deux raisons" etc, (Nouveau cours de mathématique §. 193.)

4) La Chapelle.

„Si l'exposant est 2, la raison s'apelle *double*; *triple*, si c'est 3 etc. Une raison composée de deux raisons égales s'appelle *donblée*, *triplée* quand elle est composée de trois; *quadruplée*, quand elle l'est de quatre; et en général *multipliée* quand elle est composée de plusieurs raisons semblables etc. (*Encyclopédie* article *Raison.*)

5) Alembert.

„Souvent les commençans confondent la raison *doublée* avec la raison *double*; rien n'est cependant plus différent. La raison de 8 à 4 est une raison *double* parceque 8 est double de 4; la raison de 16 à 4 est *doublée* de celle de 4 à 2." etc. (*Encyclopédie*, art. *double.*)

6) Lorenz.

„Hierbei ist das Vielfache der Verhältniß von dem vielfachen Verhältniß wohl zu unterscheiden. Im Lateinischen sagt man hier ratio multiplicata, nicht multipla, und insbesondre duplicata, triplicata“ etc. (Elemente der Mathematik. Arithm. §. 422.)

Es würde nicht schwer seyn die Zeugnisse für meine Orthodoxie noch zu vermehren, wenn es nötig wäre: ich denke aber diese sechse werden hinlänglich seyn. Kästner, Karsten, und vielleicht noch Andre haben duplicata schon durch verdoppelt übersetzt, und nach dieser Analogie glaube ich triplicata, multiplicata, durch verdreifacht, vervielfacht übersetzen zu dürfen. Der Hofprediger Schulz hat duplicirt, triplicirt dafür gebraucht. (Anf. Gr. der reinen Mathesis; Arithm. §. 189). Lorenz, in der angeführten Stelle, hat das Vielfache der Verhältniß, und in seinem Euklides, (Buch V. Def. 10.) heißt es: das Verhältniß ist dreifach höher. Von allen diesen Ausdrükken aber gefält mir keiner, auch selbst nicht der von mir gebrauchte

brauchte. Im Ausdrukk kan ich gefehlt haben, aber nicht in der Sache. Mein Rat ist daher sich die Ausdrükke doppelt, verdoppelt ꝛc. bekant zu machen, um sie zu verstehn wan Andre sie gebrauchen; sich selbst aber ihrer zu enthalten. (Arithm. §. 264.)

Fünfter Einwurf: „Warum bezeichnet unser Vf. überall den Logarithmen einer Zahl „mit λ, nicht wie alle Andre mit log?" — Der Deutlichkeit und Kürze wegen wolte ich für log u° (A. §. 277) lieber schreiben λ u°.

Sechster Einwuuf: „H. v. W. legt sich „selbst etwas Sonderbares in den Mund, nämlich den GrundSaz, zwei gerade Linien genugsam verlängert, stoßen endlich zusammen." — Diese Sonderbarkeit ist ein Drukk- oder SchreibFehler, wie aus Vergleichung mit Geom. §. 102. erhellt.

Siebenter Einwurf: „der euklidische „GrundSaz zwei Grössen die einer dritten gleich „sind ꝛc. fliesst aus dem Begriff der Gleichheit." — Ich finde beim Euklides keine Definition der Gleichheit. Und dan, solte sich nicht mein Grundsaz zwei gerade nicht gleichlau-

laufende Linien ꝛc. eben so gut aus dem Begriff gerader Linien herleiten lassen? (Man sehe Vorr. S. V.). Uebrigens gesteht der Recensent, daß er die Behauptung seines Vorgängers: „Man könne nur aus solchen Grund-Sätzen strenge beweisen die aus Definitionen hergeleitet sind," eben so wenig als ich für die wahre Ansicht der Sache halte.

Die Bemerkung daß viele meiner Exempel aus dem kästnerschen Lehrbuche übertragen sind, ist gegründet. Es ist meine Gewohnheit Beispiele aus andern Lehrbüchern zu nehmen, aber sie nach meiner Art zu berechnen, und dadurch die Arbeit meiner Vorgänger zuweilen zu erläutern, und nicht selten zu berichtigen, wie § 239 beweisst. Ich weis aus eigner Erfahrung wie willkommen dergleichen HandReichungen Anfängern und SelbstLehrlingen zuweilen sind.

Niden, den 19. März, 1799.

# Anfangsgründe der Geometrie.

## Drittes Buch:

von den Proportionen bei Dreiekken und Parallelogrammen.

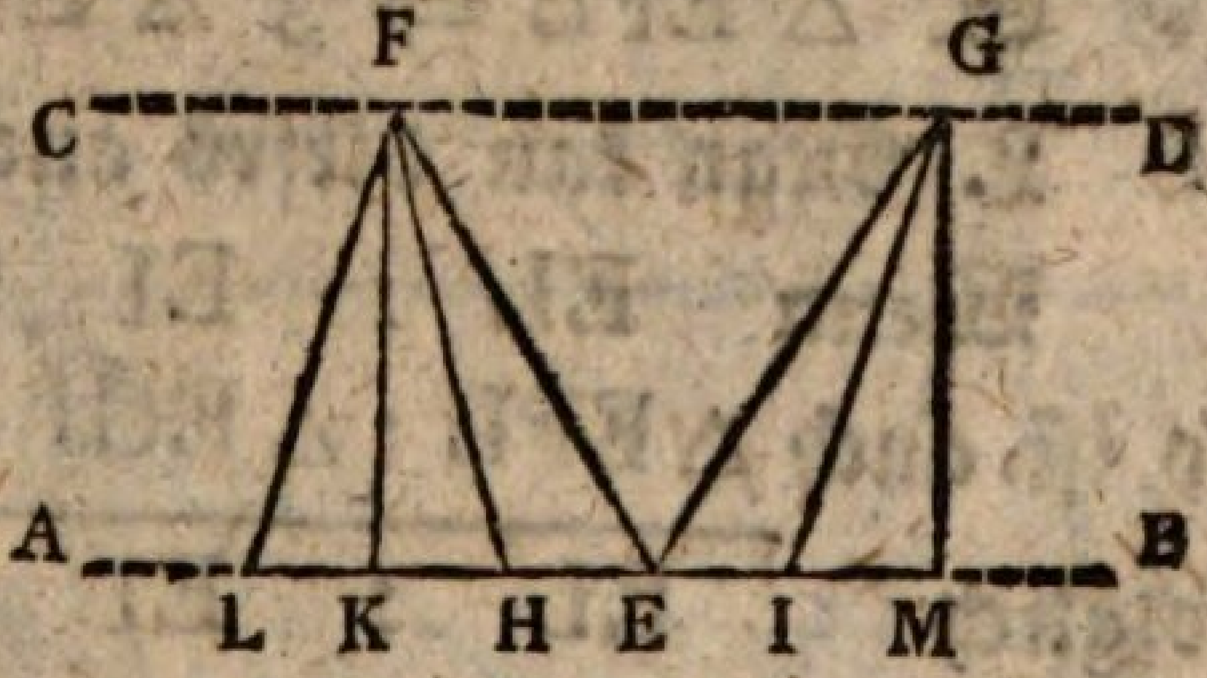
# Drittes Buch.

## Von Proportionen bei Dreiekken und Parallelogrammen.

### Erster Saz.

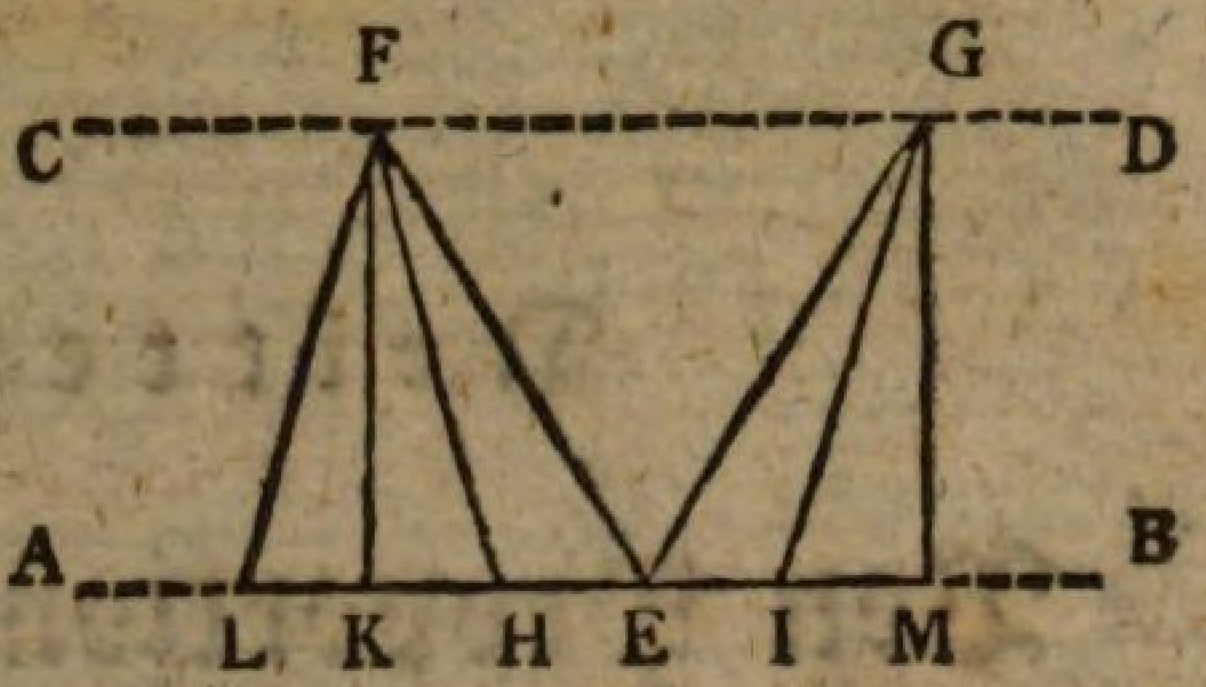
### §. 238.

1. Es werden zwei gleichlaufende Linien AB, CD, von willkührlicher Länge, und in willkührlicher Entfernung, gezogen. (§. 99.) Auf AB wird ein Punkt E, und auf CD werden zwei




Punkte, F und G, nach Belieben angenommen; und nun werden die Linien EF und EG gezogen. Ferner werden auf AB, zu beiden Seiten von E, die Punkte H und I in beliebiger, aber gleicher Entfernung, bemerkt, und hierauf die Linien HF und IG gezogen. — Da sind nun zwei Dreiekke EFH und EGI: welches von beiden ist das gröste?

S. Sie sind beide gleich groß, denn sie haben gleiche Höhen und gleiche Grundlinien. (§. 149).




L. Wir wollen die Entfernung EH noch ein Mal von H nach K tragen, und die Linie FK ziehen. — Da haben wir ein paar neue Dreiekke, HFK und EFK. Wie verhält sich nun das Dreiekk EFK zum Dreiekke EGI?

S. Wie 2 zu 1. Denn EFK ist aus zwei Dreiekken, EFH und HFK, zusammen gesetzt, von denen jedes so groß ist als EGI. (§. 149).

L. Wenn man nun an EK noch ein Stükk, KL = EH = HK, ansetzt; so erhält man EL = 3 EI. Zieht man nun FL, so ist △EFL ; ; ?

S. △ EFL = 3 △ EGI (§. 149).

L. Man kan dieses auch so ausdrukken:

Wenn EL : EI = 3 : 1
so ist auch △EFL : △EGI = 3 : 1
folglich EL : EI = △ EFL : △EGI (§. 237). Das heisst ; ; ?

S. Beide Dreiekke, EFL und EGI, verhalten sich wie ihre Grundlinien EL und EI.

L. Nun wollen wir auch IM gleich EI machen. So haben wir

EM : EI = 2 : 1
und EM zu EL ; ; ?

S. EM : EL = 2 : 3

L.

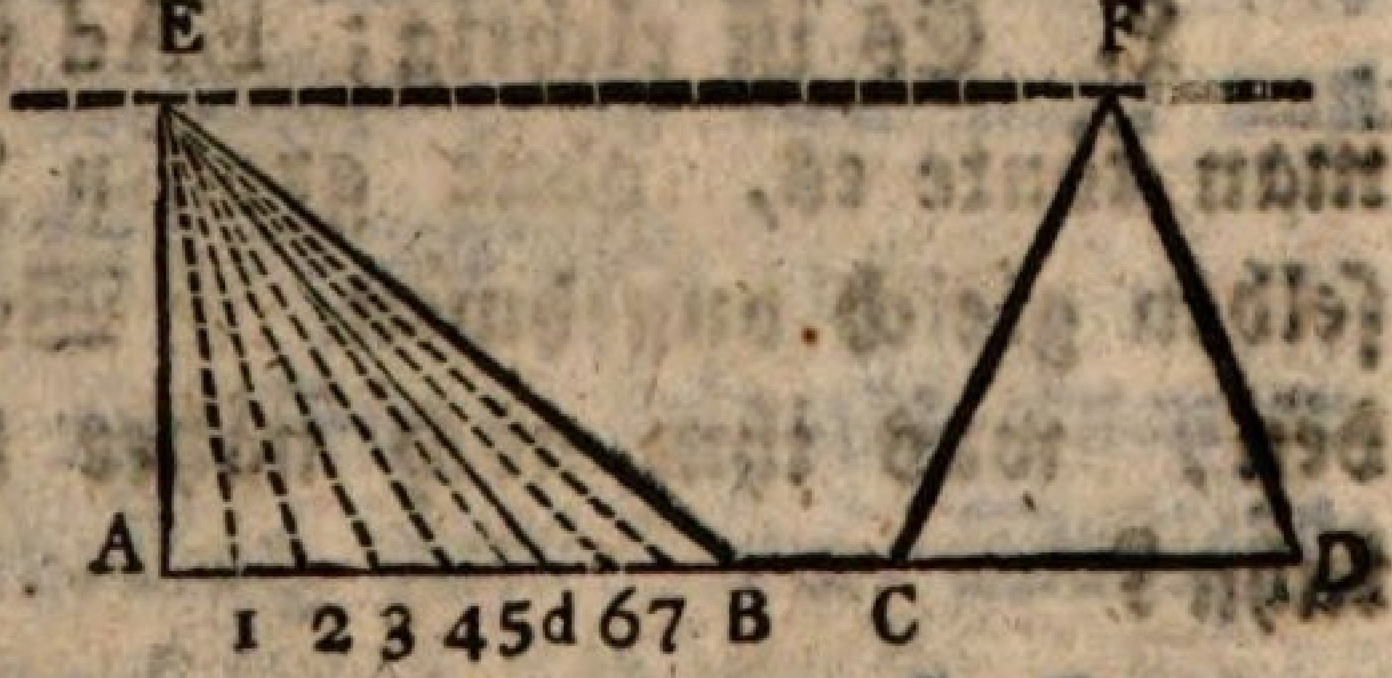
L. Es wird die Linie GM gezogen. Wie verhalten sich die Dreiekke EGM und EFL zu einander?

S. $\triangle EGM : \triangle EFL = 2 : 3 = EM : EL$

L. Das Verhältniß beider Dreiekke zu einander ist also wiederum wie das ihrer GrundLinien. Man könte ja also wol als ausgemacht annehmen: Dreiekke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre GrundLinien?

S. Ich solte meynen.

L. Gleichwol lassen sich noch Einwürfe machen. Man kan nämlich sagen: Die GrundLinien sind hier aus solchen Teilen zusammen gesetzt, welche jede genau messen: und für diesen Fall ist der Satz erwiesen. Wir müssen aber nun untersuchen, ob er sich auch für den erweisen lässt, da die GrundLinien kein gemeinschaftliches Maß haben, oder da ihr Verhältniß irrational ist. Zu dem Ende werden ein par Linien von willkührlicher, aber ungleicher Länge, AB und CD, gezogen. Ueber diesen werden zwei Dreiekke ABE und CDF, von gleicher Höhe, gezeichnet. Wie




wird man nun von diesen erweisen, daß sie sich verhalten wie ihre GrundLinien?

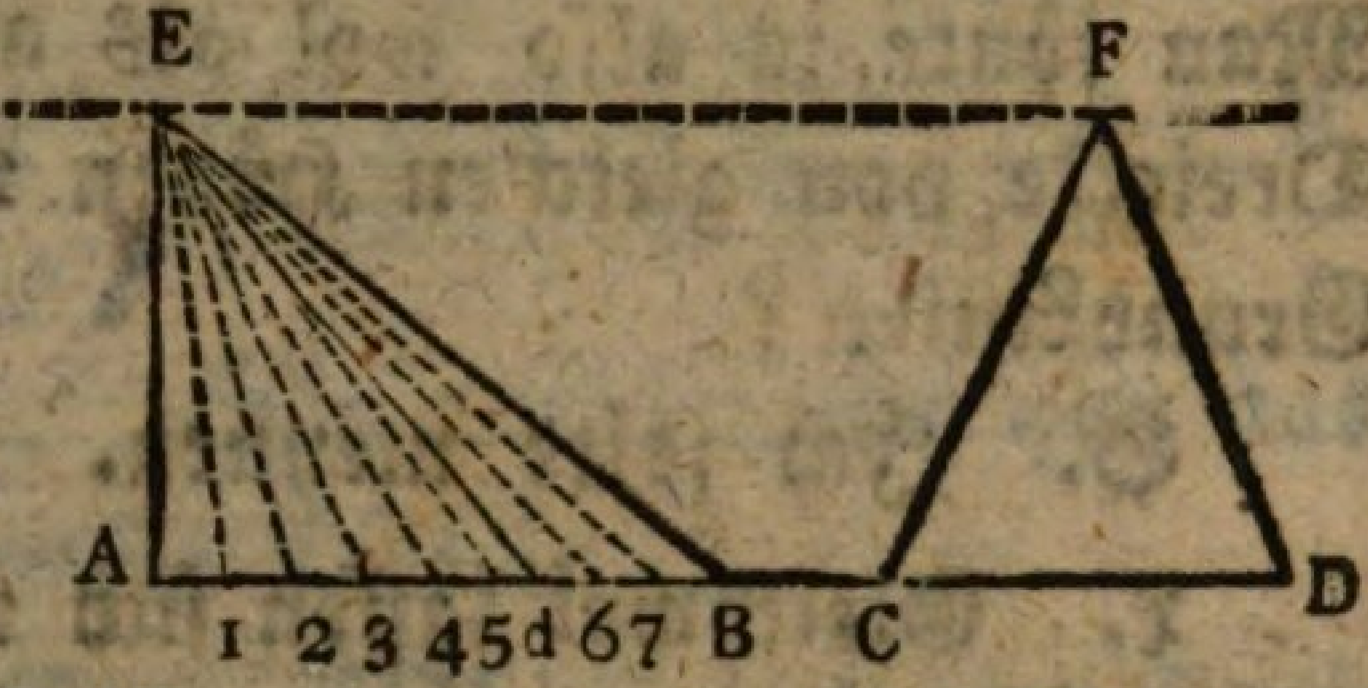
S. = = =

L. Wir wollen die längste der beiden GrundLinien, hier AB, in 8 gleiche Teile zerteilen (§. 66), und aus allen TeilungsPunkten gerade Linien nach der

Spitze E des Dreiekks ziehen. Die auf solche Art entstandenen Dreiekke EA1, EA2, EA3 ꝛc. wie verhalten die sich zu einander?

S. Wie ihre Grundlinien: denn sie haben gemeinschaftliches Maß, und die Dreiekke einerlei Höhe.

L. Nun wollen wir die kleinere Grundlinie CD, auf die grössere AB, von A nach d tragen, und die Linie Ed ziehen. — Wie groß ist nun das Dreiekk EAd?




S. △ EAd = △ FCD (§. 149).

L. Wir können also künftig eins für das andre nehmen. — Welches sind nun von den Dreiekken EA1, EA2, EA3 ꝛc. diejenigen, welche dem Dreiekke EAd am nächsten kommen?

S. Die Dreiekke EA5 und EA6. *)

L. Es ist richtig; EAd fält zwischen beide, und man könte es, ohne grossen Irtum, für einem derselben gleich annehmen. Wolte man aber eins finden, was ihm noch näher käme, was müste man tuhn?

S. Noch ein Mal halbiren, und AB in 16 Teile zerschneiden.

L.

*) Es versteht sich von selbst, daß wenn in einer andern Verzeichnung dieses nicht zuträfe, für 5 und 6 andre Zahlen zu setzen sind.

L. Recht! Unter den auf solche Art entstehenden neuen Dreiekken, müssen sich ein par finden, die EAd um ein Ansehnliches näher kommen als EA5 und EA6, und die man daher mit grösserem Fuge für ihm gleich annehmen kan. — Wäre man aber mit dieser Näherung noch nicht zufrieden?

S. So müste man sie noch weiter treiben; das heisst noch weiter halbiren, wenn es angeht.

L. Mit Werkzeugen, oder in der Taht, vielleicht nicht mehr; in Gedanken aber, oder mit dem Verstande noch sehr gut. Da kan man die Halbirung fortsetzen so weit man wil, und sich so dem Dreiekke EAd bis ins Unendliche nähern, bis der Unterschied so geringe wird, daß er verschwindet, oder für nichts zu achten ist. — Und was wird nun endlich das Resultat, oder die SchlußFolge hiervon seyn?

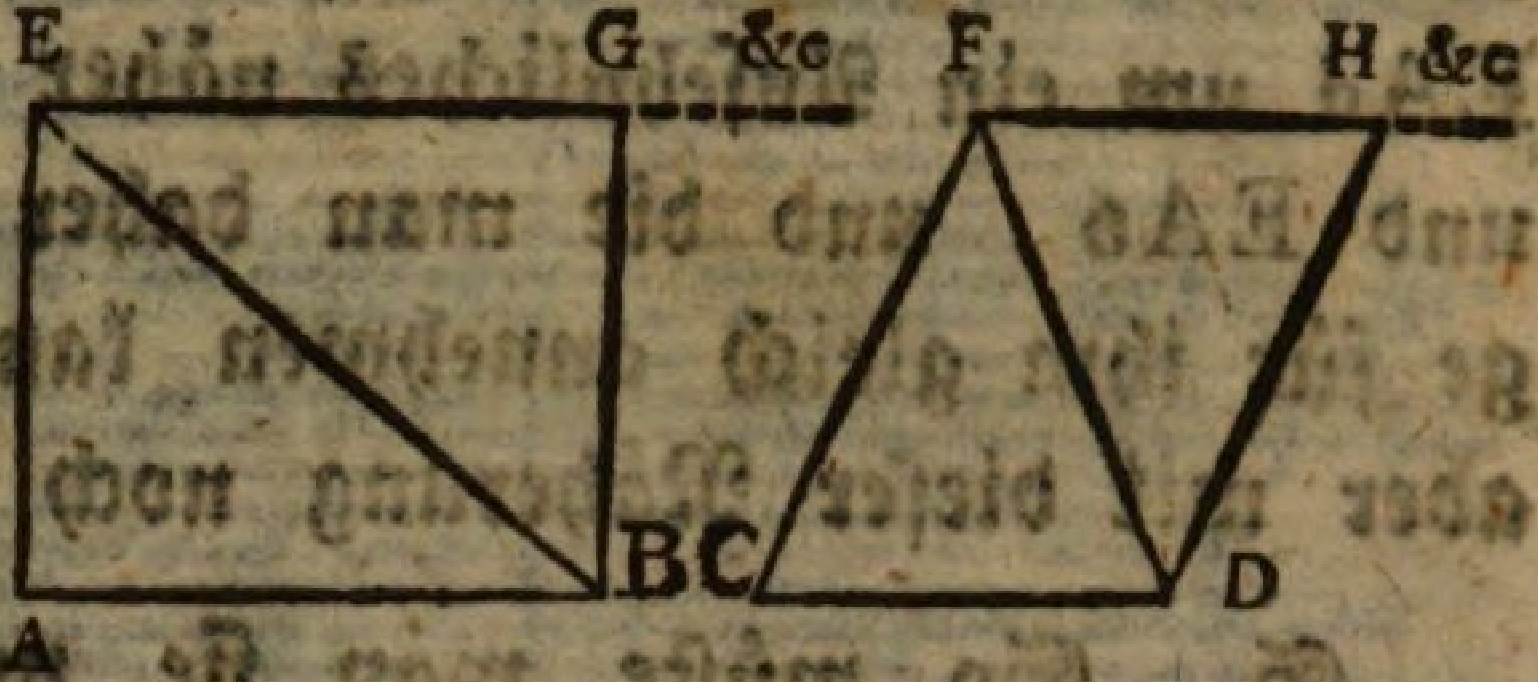
S. Da Dreiekke, die EAd so nahe kommen, daß sie nicht mehr davon zu unterscheiden sind, sich wie ihre GrundLinien verhalten; so kan man von EAd = FCD ein Gleiches annehmen.

L. Richtig! Und nun können wir als einen erwiesenen, als einen LehrSatz aufstellen: Dreiekke von gleichen Höhen verhalten sich = =

S. Wie ihre GrundLinien.

§. 239.

L. In der vorigen Zeichnung werden, aus den Spitzen E und F, der Drekke mit den Grundlinien AB und CD, unbestimmte gleichlaufende Linien E&c F&c gezogen (§ 99). Hierauf werden, aus B und D, andere, mit AE und CF gleichlaufende, Linien, gezogen, die mit den vorigen zusammen treffen in G und H. So entstehn zwei vierekkige Figuren, ABGE und CDHF. Was für Vierekke sind diese?




S. Parallelogrammen. (§. 129).

L. Und wie verhalten sich nun die Drekke ABE, CDF, zu den Parallelogrammen AG, und CH?

S. Sie sind halb so groß; nämlich
$\triangle$ ABE = $\frac{1}{2}$ AG }
und $\triangle$ CDF = $\frac{1}{2}$ CH } (§. 154).

L. Nun ist $\triangle$ ABE : $\triangle$ CDF = AB : CD (§. 238)
Oder $\frac{1}{2}$ AG : $\frac{1}{2}$ CH = AB : CD;
folglich AG : CH = AB : CD (Ar. §. 235). Das heisst : : ?

S. Parallelogrammen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

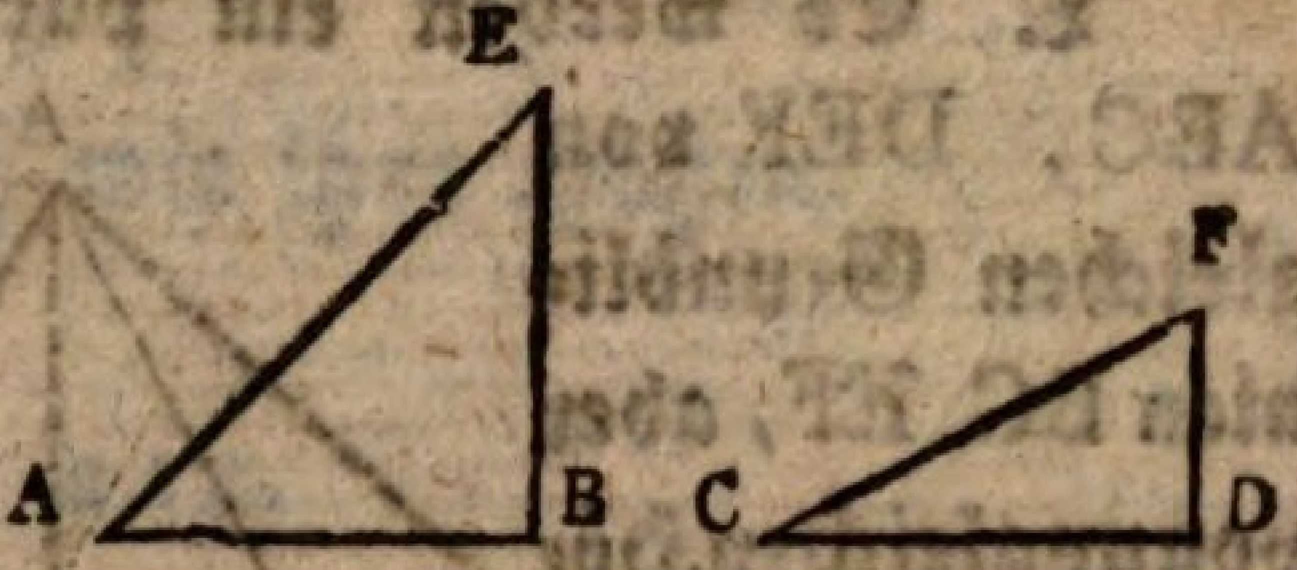
L. Sonst lässt sich dieser Satz auch wie der vorige beweisen, wie schon von selbst in die Augen fält.

Zwei-

## Zweiter Saz.

### §. 240.

L. Es werden zwei gerade Linien AB, CD, von gleicher Länge, gezogen. An den Enden B und D derselben werden senkrechte Linien BE und DF, von ungleicher Länge, errichtet (§. 67); und zulezt werden AE und CF gezogen. — Da haben wir zwei Dreiekke, ABE und CDF: was wissen wir von ihnen?




S. Es sind rechtwinklige Dreiekke, (§. 120), von gleichen GrundLinien und von ungleichen Höhen (§. 146).

L. Könte man nicht auch die Seiten BE und DF für GrundLinien der Dreiekke annehmen?

S. O ja. Sind BE und DF ihre GrundLinien, so sind AB und CD ihre Höhen. (§. 146.)

L. So wären denn ABE und DEF Dreiekke von gleichen Höhen und ungleichen GrundLinien, die sich zu einander verhielten : : ?

S. Wie ihre GrundLinien BE und DF.

L. Oder, wenn man, wie Anfangs, AB und CD GrundLinien, BE und DF aber Höhen nennt?

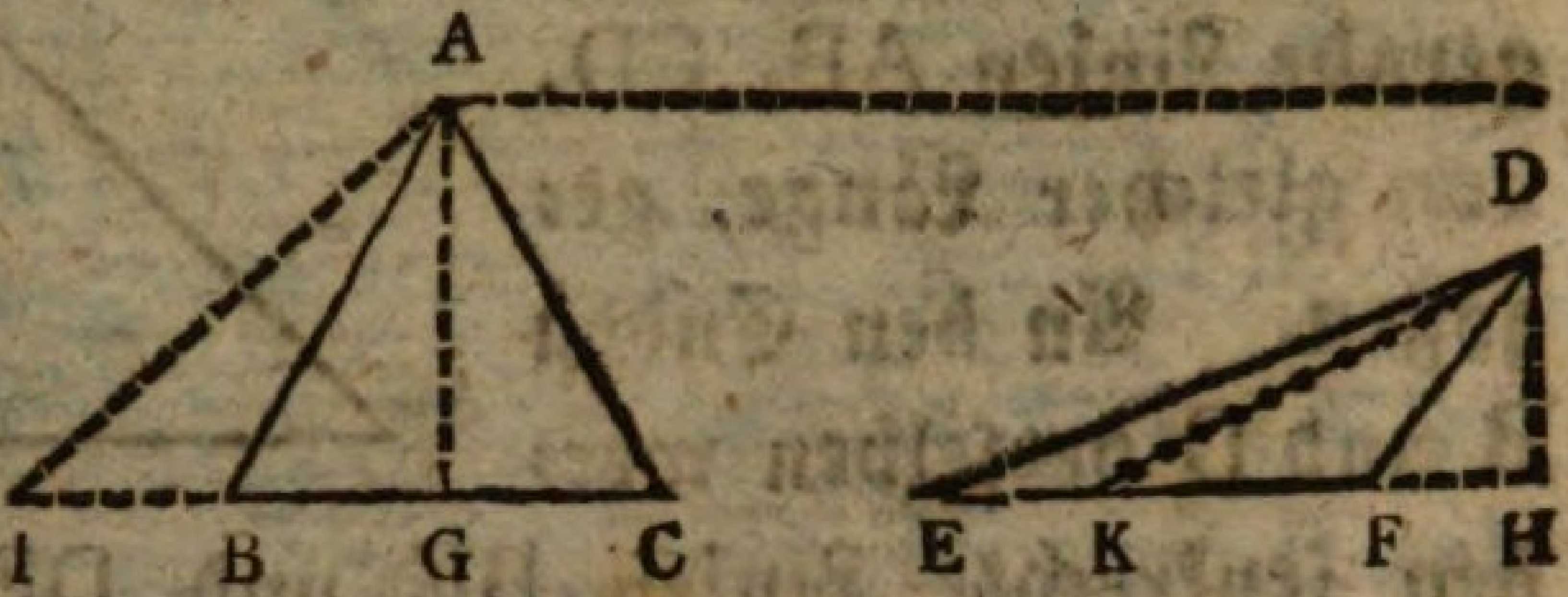
S. So verhalten sie sich wie ihre Höhen.

L. Rechtwinklige Dreiekke also, von gleichen GrundLinien, verhalten sich wie ihre Höhen.

## Dritter Satz.

### §. 241.

L. Es werden ein par schiefwinklige Dreiekke ABC, DEF von gleichen Grundlinien BC EF, aber von ungleichen Höhen gezeichnet. --




Rechtwinklige Dreiekke von gleichen GrundLinien und ungleichen Höhen verhielten sich wie ihre Höhen (§. 240): wie aber schiefwinklige von dieser Beschaffenheit?

S. . . .

L. Lassen sich nicht die schiefwinkligen Dreiekke in rechtwinklige verwandeln?

S. Ja, ich ziehe von ihrer Spitze auf die GrundLinien, oder deren Verlängerung senkrechte Linien, AG und DH (§. 69): trage die Länge der GrundLinien BC und EF, von G nach I, und von H nach K, und ziehe die Linien AI und DK:

so ist △ AGI = △ ABC }
und △ DHK = △ DEF } (§. 149).

Nun sind AGI und DHK rechtwinklige Dreiekke von gleichen GrundLinien GI und HK, und ungleichen Höhen, nach der Verzeichnung; folglich verhalten sie sich wie ihre Höhen (§. 240). Da aber ihre GrundLinien und Höhen zugleich die der schiefwinkligen Dreiekke ABC, DEF sind (§. 146); so verhalten sich auch diese wie ihre Höhen.

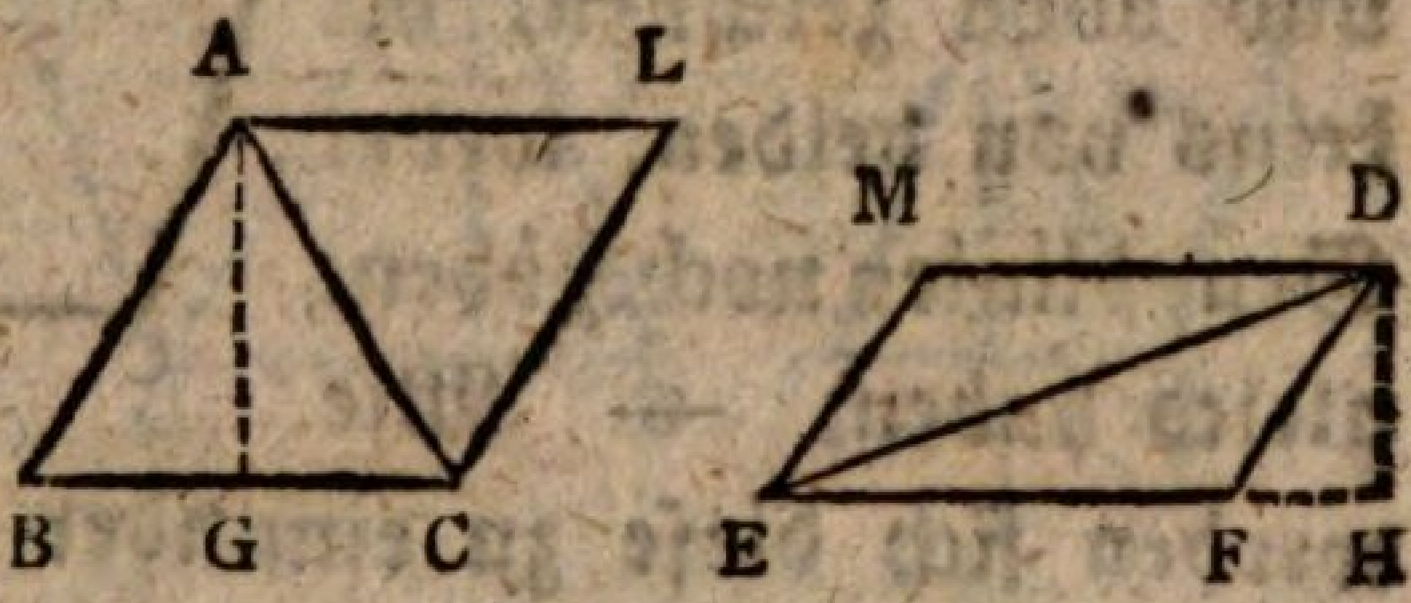
L. Nun

L. Nun können wir den Satz, der vorhin nur auf rechtwinklige Dreiekke eingeschränkt war, allgemein ausdrukken: Dreiekke von gleichen Grundlinien : :

S. Verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 242.

L. Die vorigen Dreiekke ABC, DEF von gleichen Grundlinien BC, EF, und ungleichen Höhen, bleiben. Mit ihnen auf einerlei Grundlinien, und von gleicher Höhe wie sie, werden zwei Parallelogramme, ABCL und EFDM gezeichnet. — Wie verhalten sich nun die Dreiekke ABC, DEF, zu diesen Parallelogrammen BL, FM?




S. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BL$
$\triangle DEF = \frac{1}{2} \square FM$ } (§. 154)

L. Nun ist $\frac{1}{2}$ BL : $\frac{1}{2}$ FM = AG : DH (§. 241); folglich : : ?

S. BL : FM = AG : DH (Ar. §. 235).

L. Das heisst : : ?

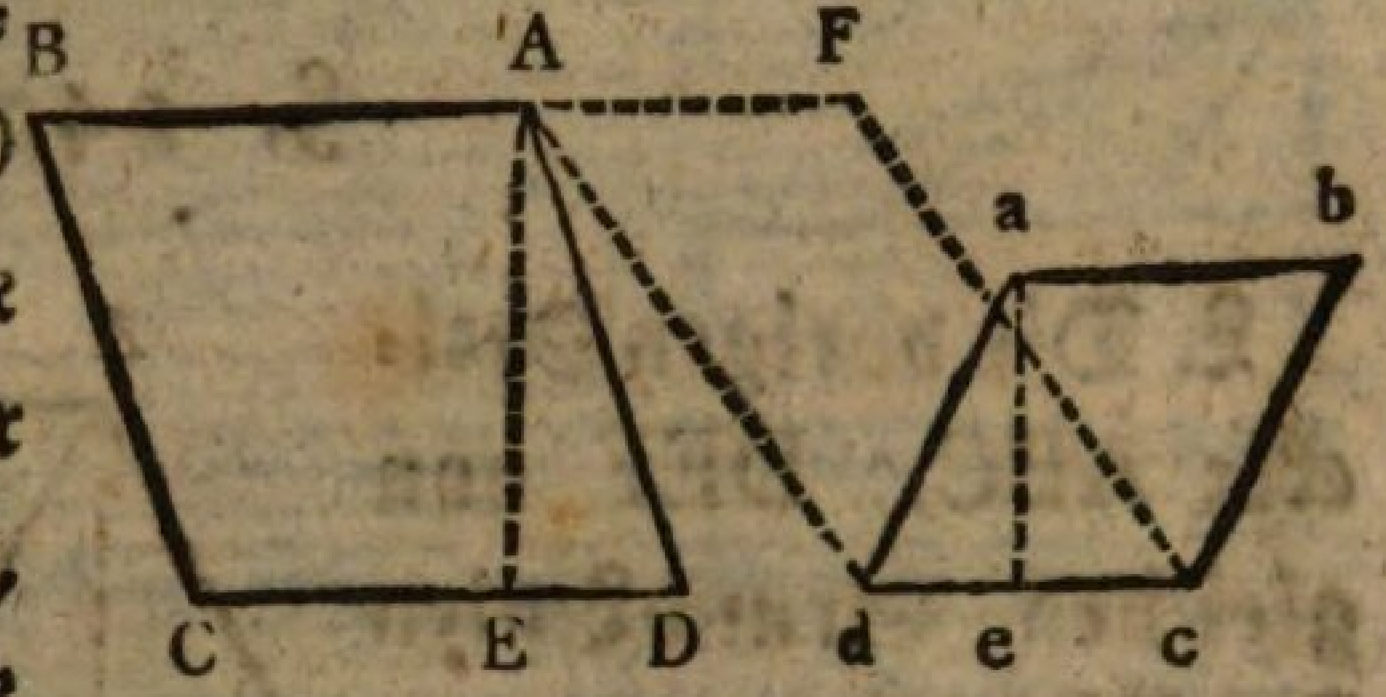
S. Parallelogrammen von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Vier-

## Vierter Satz.

### §. 243.

L. Bisher haben wir von Dreiekken und Parallelogrammen gehandelt, die entweder gleiche Höhen, oder gleiche GrundLinien hatten. Jezt wollen wir einmal ein par Parallelogramme ABCD und abcd zeichnen, die keins von beiden, weder Grundlinien noch Höhen, gleich haben. — Wie werden sich diese zu einander verhalten?




S. ; ; ;

L. Wir wollen ein drittes Parallelogramm zeichnen, welches mit einem der gegebenen db, die Grund-Linie dc, mit dem andern DB aber die Höhe AE gemein habe. Wie ist nun das Verhältniß dieses dritten Parallelogramms AdcF, zu den beiden gegebenen ABCD und abcd?

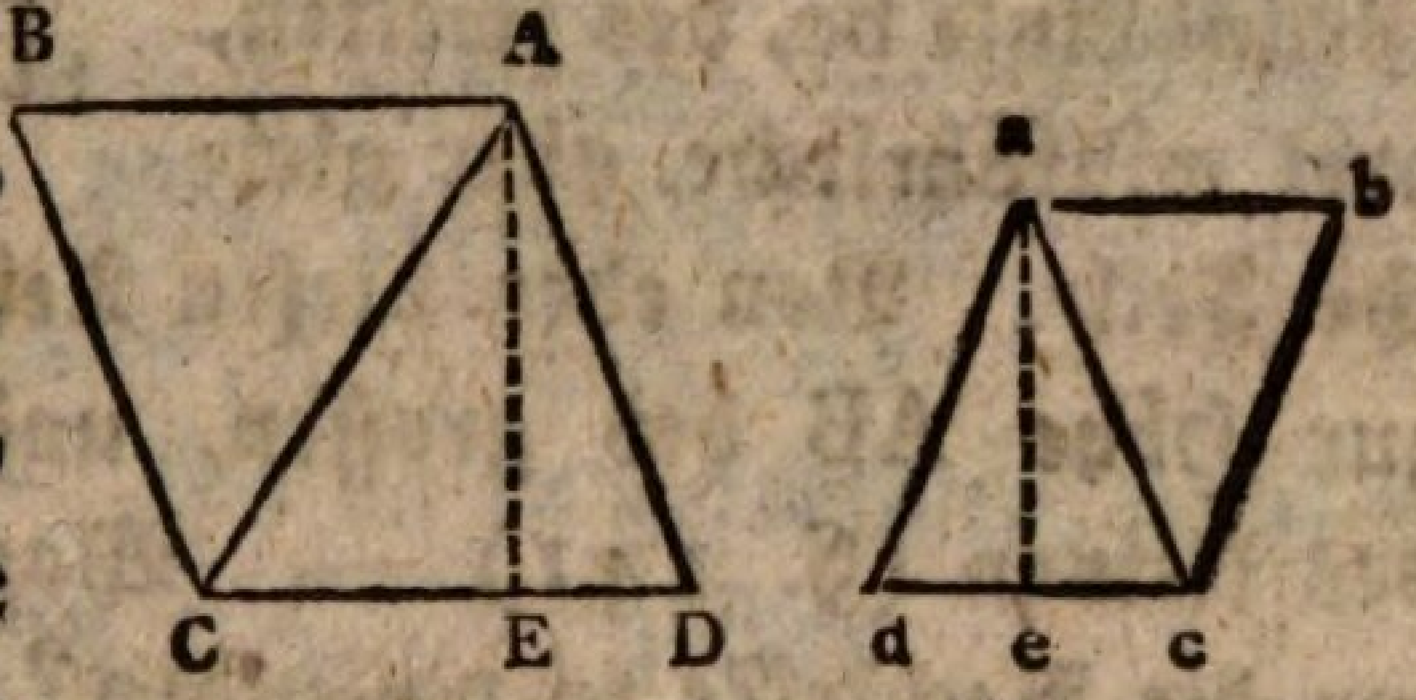
S. ▭ BD : ▭ Fd = CD : cd (§. 239)
▭ FD : ▭ bd = AE : ae (§. 242)

$$▭\,BD : ▭\,bd = \binom{CD}{AE} : \binom{cd}{ae} = (CD \times AE) : (cd \times ae)$$ (§. 260).

Das heisst: Das Verhältniß der Parallelogrammen ist aus den Verhältnissen ihrer Höhen und GrundLinien zusammen gesezt: (▭ BD ▭ bd

bd = $\left(\frac{CD}{AE}\right) : \left(\frac{cd}{ae}\right)$). — Oder auch: Parallelogrammen verhalten sich wie die Producte aus ihren Höhen und Grundlinien. (▭ BD : ▭ bd = CD × AE : cd × ae).

§. 244.




L. Die Parallelogrammen ABCD und abcd des vorigen Paragraphs bleiben, und wir ziehn in ihnen die Diagonalen, oder Ekklinien, AC und ac;

so ist △ ABC = △ ACD und △ acb = △ acd } (§. 130) = $\frac{1}{2}$ ▭ BD = $\frac{1}{2}$ ▭ bd } (§. 154).

Nun aber ist ▭ BD : ▭ bd = (CD × AE) : (cd × ae) (§. 143). Daraus folgt : : ?

S. Daß auch $\frac{1}{2}$ BD : $\frac{1}{2}$ bd = (CD × AE) : (cd × ae) (§. 235.)

Oder △ ACD : △ acd = (CD × AE) : (cd × ae)

L. Das heisst : : ?

S. Dreiekke verhalten sich wie die Producte aus ihren Höhen und Grundlinien.

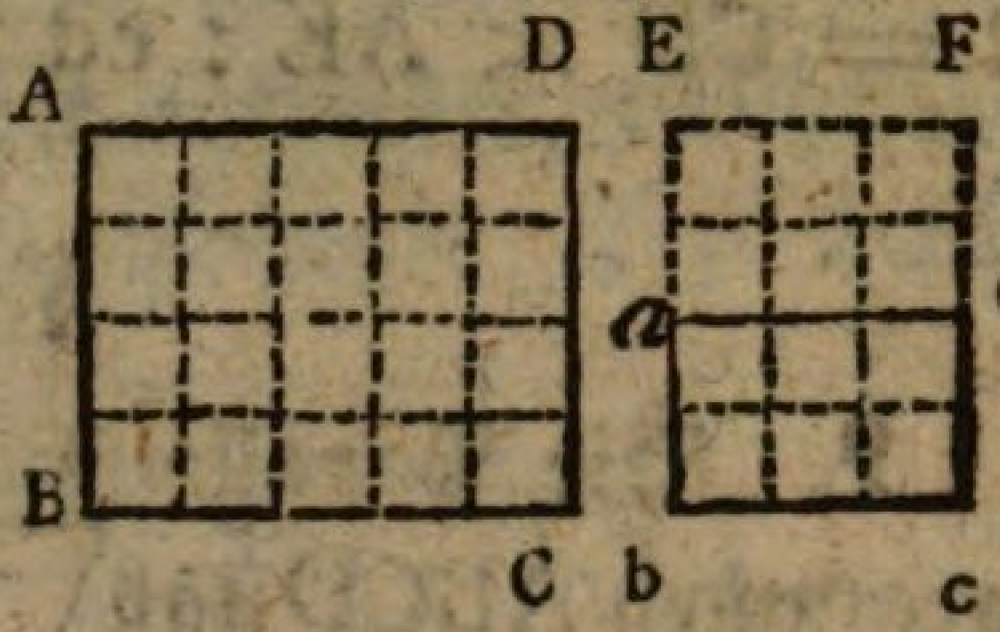
L. Oder auch, da CD × AE : cd × ae = $\left(\frac{CD}{AE}\right) : \left(\frac{cd}{ae}\right)$ (§. 260. : : ?

S. Das Verhältniß der Dreiekke ist aus den Verhältnissen ihrer Höhen und Grundlinien zusammen gesetzt.

§. 245.

§. 245.

L. Um das izt Gelernte zu versinlichen, wollen wir zwei Rechtekke, oder rechtwinklige Parallelogrammen, zeichnen. Zur Grundlinie BC, des ersten, nehmen wir fünf; zur Grundlinie bc, des zweiten, drei willkührliche, aber gleiche Teile. Von eben diesen Teilen nehmen wir viere zur Höhe AB des grossen, und zwei zur Höhe ab des kleinen (§. 141) — Was ist nun noch übrig, um die Rechtekke zu vollenden?




S. Mit BC und BA die Seiten AD und CD, und mit bc und ba die Seiten ad und cd, gleichlaufend zu ziehen (§. 133).

L. Nun noch ein drittes Rechteck, mit dem zweiten abcd auf einerlei Grundlinie bc, und mit dem ersten ABCD von einerlei Höhe bE = BA. — Zulezt werden aus allen Teilungspunkten, innerhalb der Rechtekke, gleichlaufende Linien mit den Höhen und Grundlinien, gezogen. — Was für Figuren sind es, die durch diese Teilungslinien gebildet werden?

S. Quadrate (§. 135) von gleicher Grösse.

L. Und wie viel enthält jedes Rechtekk deren?

S. ABCD = 20; abcd 6, EbcF = 12.

L. Nun wollen wir ihr Verhältniß, nach §. 243, untersuchen, und sehen, ob es hiermit überein trift.

S. $AC : Ec = BC : bc = 5 : 3$
$Ec : ac = Eb : ab = 4 : 2$

$AC : ac = (BC \times Eb) : (bc \times ab) = (5 \times 4) : (3 \times 2)$
$= 20 : 6$

Fünf-

## Fünfter Satz.

### §. 246.

L. Es wird ein Dreiekk ABC nach Willkühr gezeichnet, und innerhalb desselben wird mit einer Seite BC, eine gerade Linie gleichlaufend gezogen, welche die beiden andern Seiten in D und E schneidet. — Nun ist die Frage: Wie verhalten sich die abgeschnittenen Linien AD, DB, AE, EC, zu einander? — Um es zu erforschen, müssen wir ein par Hülfslinien BE, CD, ziehen.

S. Das ist geschehen.

L. Wie verhalten sich nun die Dreiekke DEB und DEC zu einander?

S. △ DEB = △ DEC (§. 148.)

L. Und die Verhältnisse von ADE zu beiden,
ADE : DEB
und ADE : DEC;
wie sind die beschaffen?

S. Sie sind auch gleich, das heisst:
△ ADE : △ DEB = △ ADE : △ DEC (Ar. §. 232).

L. Gibt es nicht noch andere Verhältnisse, die denen ADE : DEB und ADE : DEC gleich seien, oder mit ihnen eine Proportion machen?

S. Ja. ADE und DEB, so wie ADE und DEC, sind Dreiekke von gleichen Höhen; folglich
△ ADE : △ DEB = AD : DB
und △ ADE : △ DEC = AE : EC } (§. 238)

L. Und

L. Und Verhältnisse, welche einem dritten gleich sind = = ?

S. Sind einander selbst gleich (§. 137) folglich
AD : DB = AE : EC.

L. Und da die Glieder einer geometrischen Proportion achterlei Stellungen ertragen, (Ar. §. 240), so ist auch = = ?

S. DB : AD = EC : AE
DB : EC = AD : AE
EC : DB = AE : AD
EC : AE = DB : AD
AE : EC = AD : DB
AD : AE = DB : EC
AE : AD = EC : DB

L. Alle diese Formeln in einen Lehrsatz gekleidet, würde lauten = = ?

S. Eine in einem Dreiekke, mit einer Seite desselben gleichlaufend gezogene Linie, schneidet die beiden andern Seiten proportionirt: das heisst, so daß aus den Stükken sich geometrische Proportionen bilden lassen.

§. 247.

L. Wir müssen hier einen in der Arithmetik übergangenen Satz nachholen.

Es sei $a : b = c : d$

$ad = bc$ (Ar. § 239).

$ad + cd = bc + cd$ (§ 32).

Oder $(a + c)d = (b + d)c$ (Ar. § 117).

$(a + c) : (b + d) = c : d$ (Ar. § 241).

Diese Formel angewandt auf die Proportion:

$AD : AE = DB : EC$. (§ 246) = ?

S. Gibt $(AD + DB) : (AE + EC) = DB : EC$

Oder (§ 246) $AB : AC = DB : EC$

(Ar. § 237) $AB : CA = AD : AE$

L. Es versteht sich übrigens von selbst, nicht nur, daß sich, wenn es erfordert wird, auf alle acht Proportionen des vorigen Paragraphs, Anwendung von dieser Formel machen läßt; sondern noch überdies jede derselben ihre acht Abänderungen leidet. — Wir wollen mit der vorsetenden einen Versuch anstellen.

S. $AB : AC = AD : AE$

$AC : AB = AE : AD$

$AE : AC = AD : AB$

$AC : AE = AB : AD$

$AE : AD = AC : AB$

$AD : AE = AB : AC$

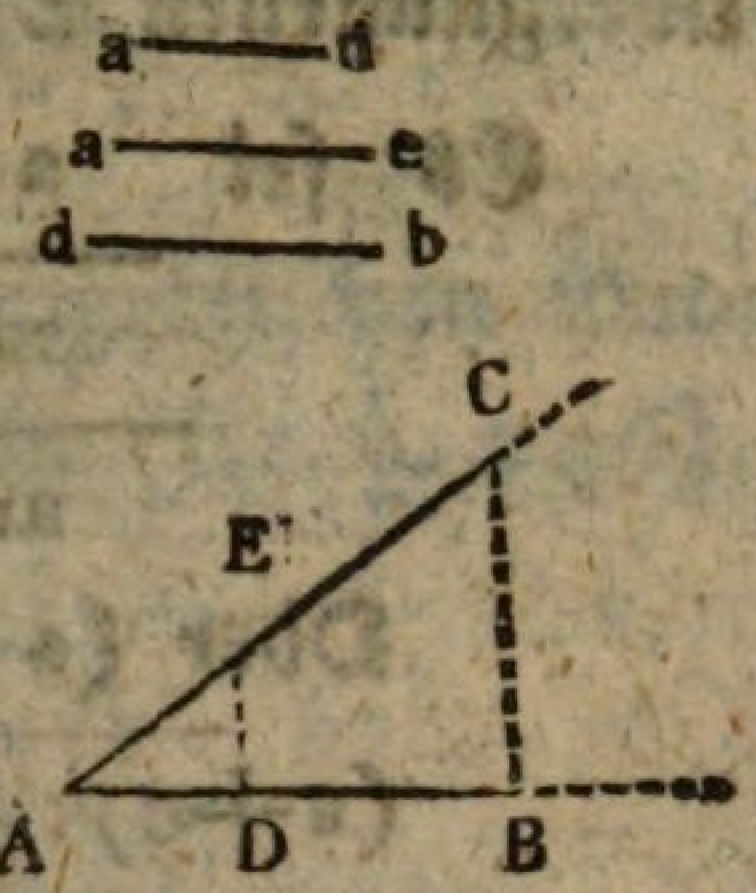
$AB : AD = AC : AE$

$AD : AB = AE : AC$

## Sechster Satz.

### § 248.

L. Hier sind drei Linien, ad, ae und db: wie wird zu ihnen die vierte geometrische Proportionallinie gefunden?




S. Ich mache einen beliebigen Winkel A, trage auf dessen Schenkel die Linien ad und ae, von A nach D, und von A nach E; desgleichen die Linie db von D nach B; ziehe die Linie DE, und mit ihr gleichlaufend die Linie BC (§. 99): so ergibt sich die vierte Proportionallinie EC. Oder es ist

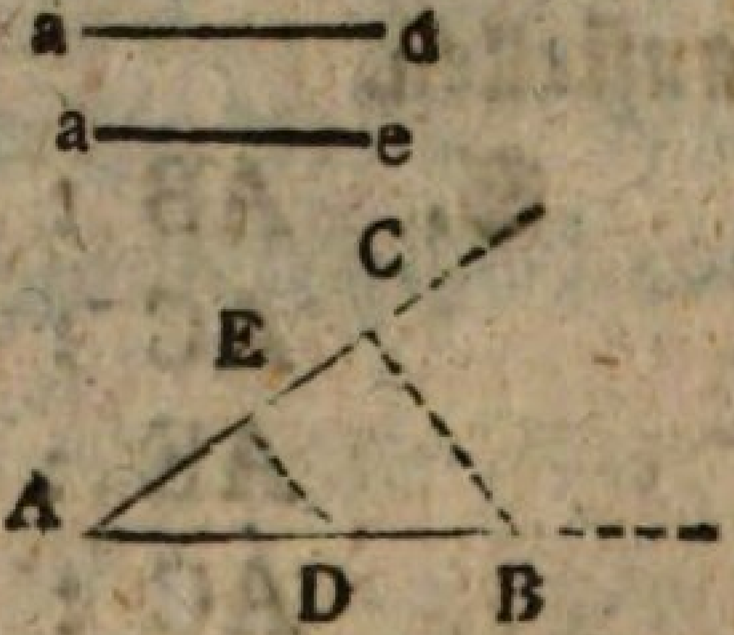
AD : AE = DB : EC (§. 246.)

oder ad : ae = db : EC

L. Es ist dieses die Regel detri in Linien. (Ar. § 145).

### §. 249.

L. Gesetzt aber es würden nur zwei Linien, ad und ae, gegeben, und man verlangte zu ihnen die dritte Proportionallinie?




S. Dan verfahre ich wie vorhin, ausser daß ich DB = AE = ae mache; so ist

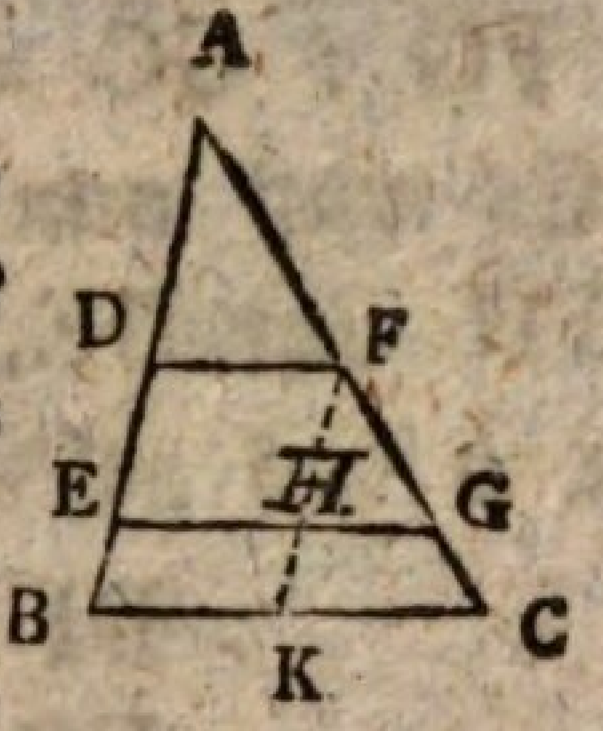
AD : AE = DB : EC (§. 246.)

oder ad : ae = ae : EC

Sie=

## Siebenter Satz.

### §. 250.




L. Es wird ein Dreiekk ABC, nach Willkühr, gezeichnet. Auf eine Seite desselben, AB, werden zwei beliebige Punkte, D und E, bemerkt. Aus diesen Punkten werden mit BC gleichlaufende Linien gezogen, (§. 99), welche mit AC in F und G, zusammen stossen. — Die Frage ist: Welches sind die Verhältnisse der Teile AD, DE, EB, AF, FG, GC, 2c. in welche die Seiten AB und AC zerschnitten sind?

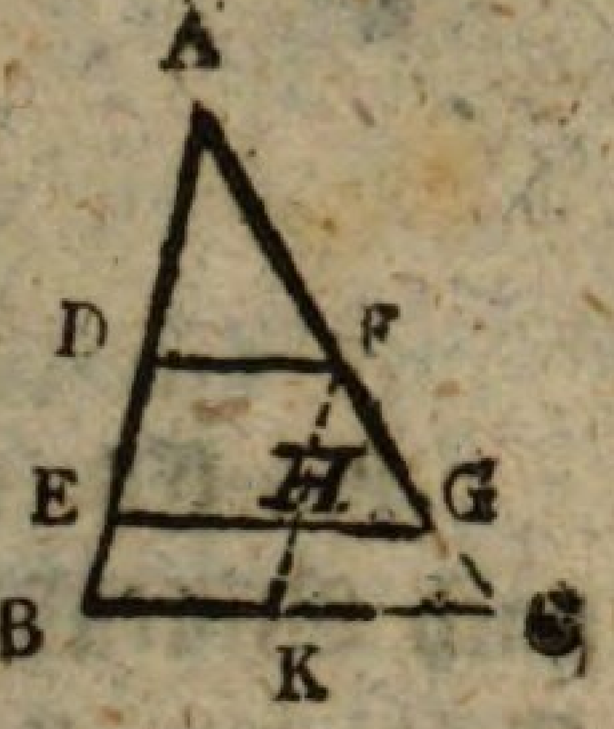
S. $\left.\begin{array}{l} AD : DE = AF : FG \\ AE : EB = AG : GC \\ AD : DB = AF : FC \end{array}\right\}$ (§. 246)

L. Die Linien DF und EG werden hier gleichlaufend angenommen. Sind sie das aber wirklich?

S. Ja, denn $\left.\begin{array}{l} EG \,\#\, BC \\ DF \,\#\, BC \end{array}\right\}$ (verfert.)

folglich $EG \,\#\, DF$ (§. 116)

L. Unter den angegebenen Verhältnissen fehlen noch die Verhältnisse DE : EB, FG : GC. Sind die auch gleich? Und wie lässt sich ihre Gleichheit erweisen? — Wir wollen von F auf BC eine gerade Linie FHK, mit AB gleichlaufend ziehen.



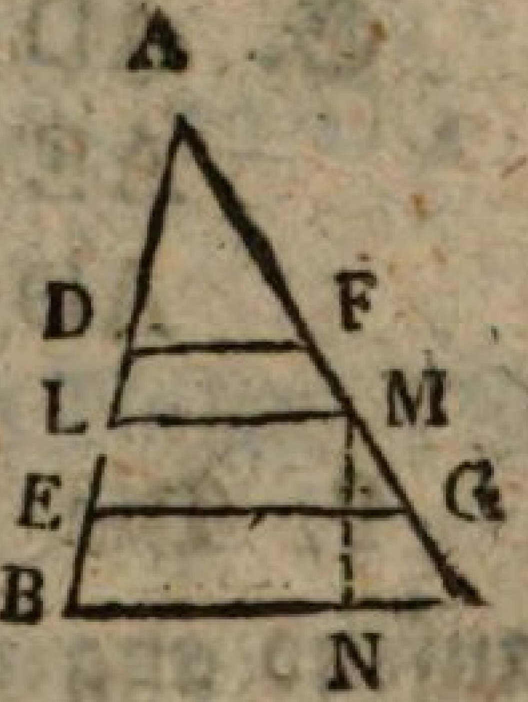

S. Das ist geschehen. — Nun ist

FG : GC = FH : HK (§ 246)

Es muß nun bewiesen werden, daß FH und DE, HK und EB, gleich sind; und das geschiht so:

$$\begin{array}{ll} DF \,\#\, EG \,\#\, BC & \text{(Bew.} \\ DB \,\#\, FK & \text{(Verf.)} \\ \hline DE = FH & \\ EB = HK & \end{array} \Big\} \text{(§. 131)}$$

Nun ist FG : GC = FH : HK (§. 246)
= DE : EB




L. Gesetzt aber man zöge, etwan zwischen DF und EG, noch eine Linie LM gleichlaufend mit BC, würde die auch proportionirte Abschnitte machen?

S. Allerdings! denn es wäre

1) AL : LB = AM : MC (§. 246)

Zieht man nun ferner MN gleichlaufend mit AB, so lässt sich, wie vorhin, beweisen, daß

2) FM : MG = DL : LE

3) FM : MC = DL : LB

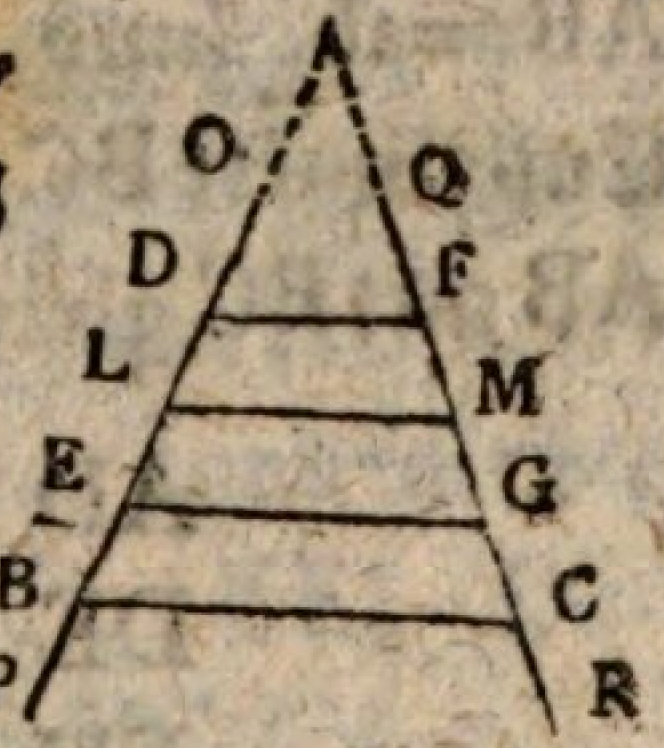
L. Der fünfte Satz (§. 246) lässt sich nun so erweitern: Linien, die innerhalb eines Dreiekks, mit

mit einer Seite desselben gleichlaufend gezogen worden, ..?

S. Schneiden die beiden andern Seiten proportionirt, so daß

AD : DL = AF : FM
DL : LE = FM : MG
LE : EB = MG : GC
DE : EB = FG : GC
u. s. w.

§. 251.




L. Es werden gerade Linien, OP, QR, aber in schiefer Richtung gegen einander, (§. 101) gezogen, und durch gleichlaufende Linien, DF, LM, EG, BC, verbunden. — Wie verhalten sich nun die Abschnitte dieser schiefen Linien gegen einander? Sind sie proportionirt, oder nicht?

S. Sie sind proportionirt, so wie die vorigen

DL : LE = FM : MG
LE : EB = MG : GC

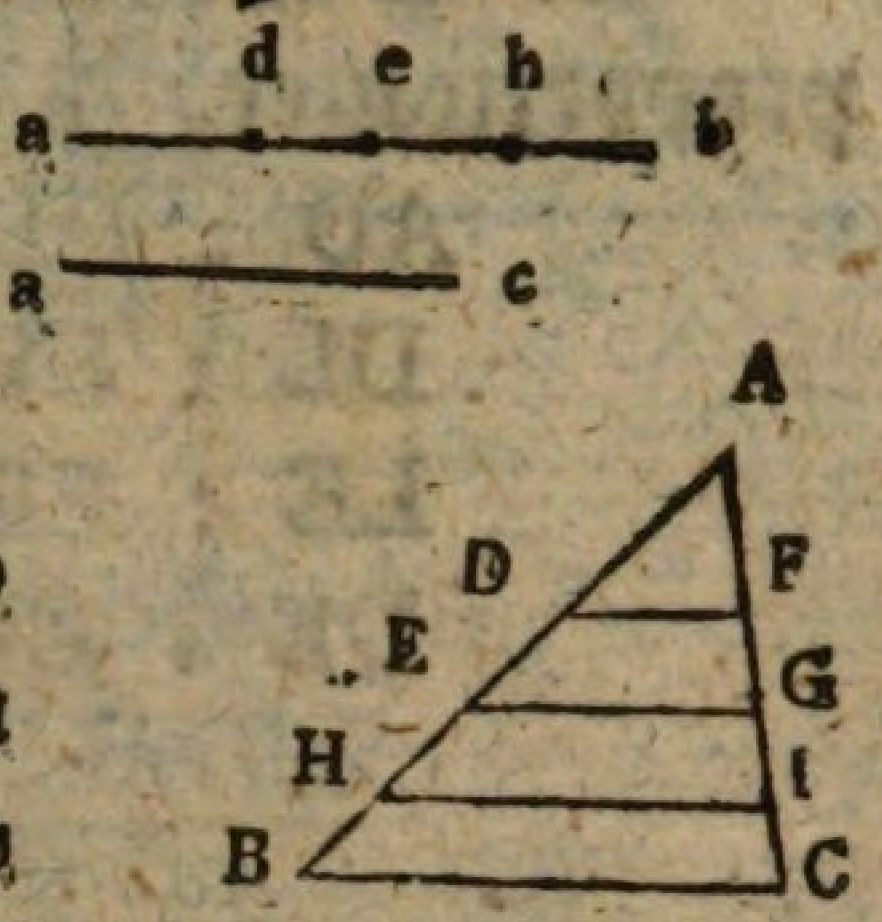
Denn man darf nur die Linien OP, QR verlängern bis sie in A zusammen stossen (§. 102) und ein Dreieck ABC bilden.

L. Also wenn zwei schiefe Linien durch gleichlaufende geschnitten werden ..?

S. So sind die Schnitte proportionirt.

## Achter Satz.

### § 252.




L. Es werden zwei gerade Linien ab, ac, gegeben, von denen die eine ab in ungleiche Teile, ad, de, eh, hb, zerschnitten ist. Es wird verlangt die andre ac nach eben den Verhältnissen (das heisst, in Teile, die denen von ab proportionirt sind) zu zerschneiden.

S. Ich mache einen Winkel, dessen einer Schenkel AB=ab, und der andre AC=ac; verbinde die End-Punkte BC; ziehe aus allen Teilungs-Punkten von AB mit BC gleichlaufende Linien DF, EG, HI; so ist

$$\left.\begin{array}{l} AD : DE = AF : FG \\ DE : EH = FG : GI \\ EH : HB = GI : IC \end{array}\right\} (§. 250)$$

L. Ganz recht! Es lässt sich also eine gegebene gerade Linie nach eben den Verhältnissen teilen als eine andre gegebene. — Vorhin hatten wir die Regel Detri in Linien (§. 248): was für einer Rechnung entspricht gegenwärtige Aufgabe?

S. Der Gesellschafts- oder Vermischungs-Rechnung. (Ar. § 251, 252, 253)

### § 253.

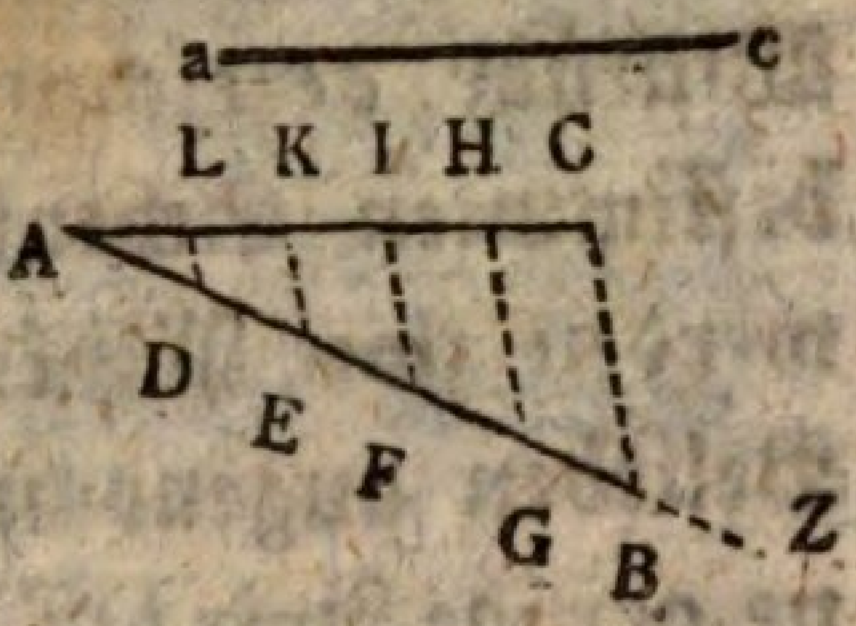
L. Gesetzt die Teile oder Abschnitte der Linie AB=ab (§. 252) wären alle einander gleich:

AD

AD=DE=EH=HB: wie würden die Abschnitte der Linie AC=ac dan beschaffen seyn?

S. Sie würden auch einander gleich seyn. (§. 250 und Ar. § 243)

L. So liesse sich ja also wol eine gegebene Linie ac in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile in fünfe zum Beispiel, zerschneiden?

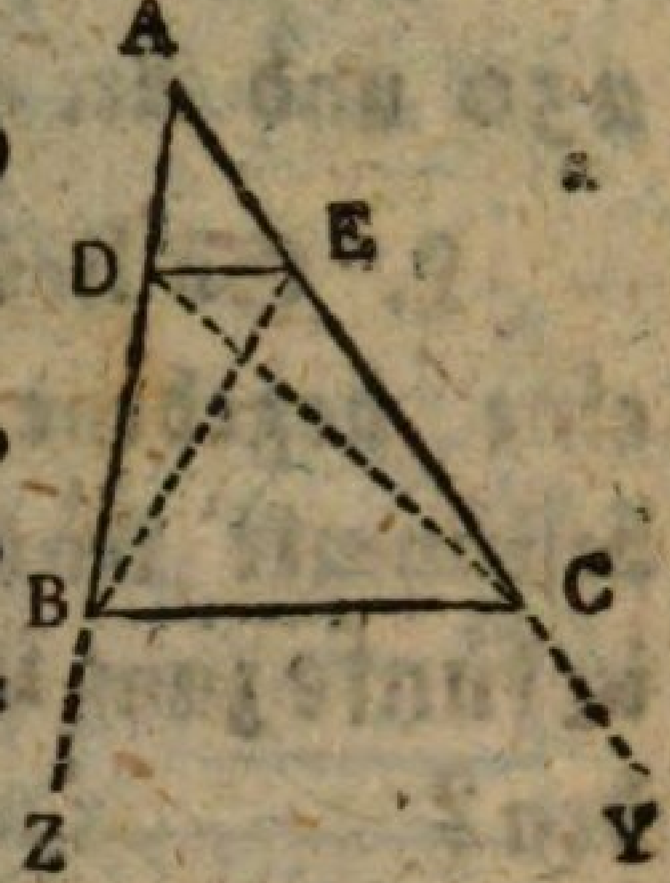



S. O. ja; ich darf nur an die gegebene ac, oder an eine ihr gleiche AC, eine andre unbestimmte Linie AZ, so ansetzen, daß sie mit ihr einen beliebigen Winkel A macht; auf die Linie AZ, von A aus, fünf beliebige gleiche Teile tragen, AD=DE =EF=FG=GB; die Linie BC ziehen, und mit dieser gleichlaufend die Linien GH, FI, EK, DL: so erhalte ich AL=LK=KI=IH=HC.

L. Ganz richtig! Ja man braucht, um eine gegebene gerade Linie in so viel gleiche Teile zu teilen als man will, nicht einmal alle diese gleichlaufende Linien wirklich zu ziehen; sondern es ist an einer DL oder GH genug. Man darf alsdan nur den Abschnitt AL, oder CH, auf AC weiter tragen.

## Neunter Satz.

### § 254.




L. Es wird ein Winkel A nach Willkühr gezeichnet. Auf den unbestimmten Schenkeln AZ und AY, werden zwei Punkte, D und E, nach Belieben angenommen, und durch eine gerade Linie DE verbunden. Hierauf wird AD von D nach B getragen, so oft als man gut findet, zwei, drei, oder mehr Mal. Eben so oft als AD von D nach B getragen ist, wird auch AE von E nach C getragen; und nun wird die Linie BC gezogen. — So erhält man zwei Dreiekke, ADE und ABC. Was weis man von diesen?

S. Daß ihre Seiten proportionirt sind, nämlich AD : DB = AE : EC (Ar. § 232.)

L. Aber sind die Linien DE und BC gleichlaufend? — Um das zu erforschen brauchen wir ein Par Hülfslinien, DC und BE. — Da haben wir zwei Dreiekke, DEB und DEC, die auf einerlei Grundlinie DE stehen. Wären sie gleich groß, so würde daraus folgen . . ?

S. Daß sie zwischen einerlei gleichlaufenden Linien stehen (§. 150); oder daß DE und BC gleichlaufend seien.

L. Wie werden wir aber die Gleichheit der Dreiekke erforschen?

S. Ich weis es nicht.

L. Nach den Sätzen der Gleichheit und Aehnlichkeit (§. 54, 61, 92) wird es auch nicht zu bewerkstelligen seyn: aber der erste Satz dieses Buchs, (§. 238) wird uns zu statten kommen.

S. $\triangle ADE : \triangle DEB = AD : DB$
$\triangle ADE : \triangle DEC = AE : EC$ } (§. 238)

$\triangle ADE : \triangle DEB = \triangle ADE : \triangle DEC$ (A. §237)

$\triangle DEB = \triangle DEC$ *)

DE ‡ BC (§. 150)

L. Wenn also eine Linie zwei Seiten eines Dreiekks proportionirt schneidet ..?

S. So ist sie der dritten Seite desselben gleichlaufend.

*) Hier wird angenommen daß Grössen die zu einerlei Grösse gleiches Verhältniß haben, gleich sind. Dieser Satz hätte in der Arithmetik, hinter §. 238 seine rechte Stelle gehabt, wo er aber, nach dem Beispiel Andrer, übergangen ist: welches nicht hätte geschehen sollen. Wir wollen also seinen Beweis hier nachholen.

Es sei $a : b = a : c$

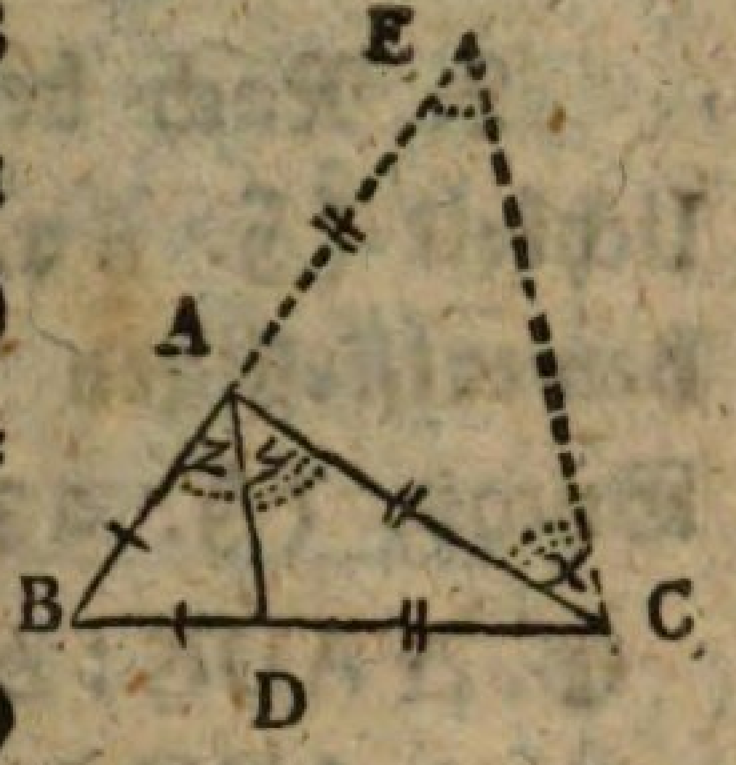
so ist $\frac{b}{a} = \frac{c}{a}$ (Ar. § 238)

$b = c$ (G. § 32 u. A. § 15.

 Zehn-

## Zehnter Satz.

### § 255.




L. Es wird ein willkührliches Dreiekk ABC beschrieben. Ein Winkel A wird halbirt (§. 62) durch eine Linie welche die gegenüber liegende Seite BC in D trift. Die Frage ist: Wie verhalten sich die Teile DB und DC der geschnittenen Seite BC, zu den beiden andern Seiten AB und AC? — Um es zu finden wollen wir BA, über A hinaus, unbestimmt verlängern; von C eine Linie mit AD gleichlaufend, ziehn, bis sie die Verlängerung von BA in E schneidet. — Wie verhalten sich nun die Linien BA, BD, AE, DC, zu einander?

S. $AD \,\#\, CE$ (verg.)

$$BA : BD = AE : DC$$ (§ 246)

L. Wären nun AE und AC einander gleich, so könte man AC in die Stelle von AE setzen, und die Frage wäre beantwortet. — Der Kürze wegen sei

$$\angle DAB = z,$$
$$\angle DAC = y,$$
$$\angle ACE = x.$$

Wären nun AE und AC gleich, so müsten es auch die ihnen gegenüber liegenden Winkel x u. E seyn: und sind es die Winkel x und E; so folgt daraus = = ?

S. Daß es auch die Seiten AE, AC, seien (§. 59)

L. Es ist also zu untersuchen ob x und E gleich sind. Aus der Voraussetzung, oder Zeichnung, ist bekant : : ?

S. Daß z = y
und AD ‡‡ CE

folglich z = E (§ 112)
y = x (§ 113)

E = x (§ 29)

AE = AC (§ 59)

Da nun BA : BD = AE : DC (§ 247)
so ist auch BA : BD = AC : DC (§ 254*)
und BA : AC = BD : DC (A. § 242)

L. Das heisst : : ?

S. Eine gerade Linie die einen Dreiekks-Winkel halbirt, schneidet die ihm gegenüber liegende Seite den beiden andern Seiten proportionirt.

## Elfter Satz.

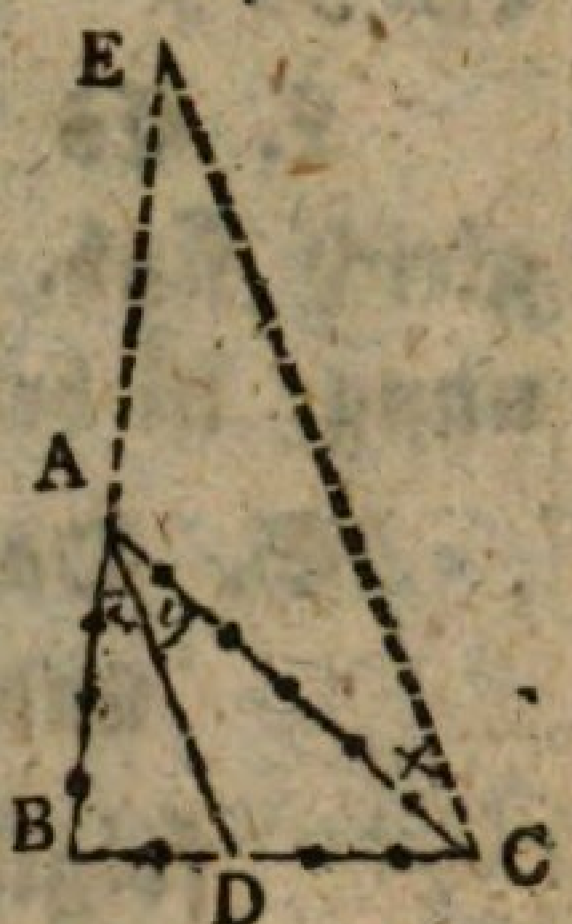
### § 256.

L. Welches ist zu 2, 3 und 4, die vierte geometrische ProportionalZahl?

S. $2 : 3 = 4 : \frac{4 \times 3}{2}$ (Ar. § 243)
$= 4 : 6$

L.

L. Hiernach wollen wir ein Dreiekk verfertige. Zuerst ziehn wir eine unbestimmte Linie, und tragen, darauf von B bis C, fünf willkührliche, aber gleiche Teile, als die Summe, der beiden ersten Glieder (2 + 3 = 5.). Zu der zweiten Seite BA nehmen wir das dritte Glied, das ist vier; und zur dritten CA das vierte Glied, das ist sechs eben dieser Teile. Zulezt wird aus der Spitze A, auf den zweiten TeilungsPunkt der Seite BC, eine Linie AD gezogen. — Wie ist nun das Verhältniß der Linien AB, AC, DB, DC zu einander?




S. AB : AC = DB : DC
= 4 : 6 = 3 : 2

L. Aber die Teile des Winkels A = z + y, wie verhalten die sich zu einander? — Wir werden, um das zu finden, HülfsLinien nötig haben. Zuerst wollen wir, wie bei §. 255, BA über A hinaus, unbestimmt verlängern; dan aus C eine mit DA gleichlaufende Linie ziehn, welche mit der Verlängerung von AB in E zusammen stößt. Den Winkel ACE wollen wir mit x bezeichnen; die Winkel DAB aber und DAC mit z und y wie vorhin — Was ist nun aus der Verzeichnung alles bekant? Und was folgt zunächst daraus?

S. AB : AC = DB : DC } (Voraussetz.)
DA ≠ CE

$$x = y \ (\S\ 112)$$
$$z = E \ (\S\ 113)$$

L. Was wollen wir eigentlich wissen?

S. Ob z und y gleich groß sind.

L. Wie groß sind beide zusammen genommen?

S. $z + y = E + x$ (§. 118)

L. Aber $y = x$, und $z = E$. Wären nun x und E gleich, so würde die Folge davon seyn . . ?

S. 1) daß auch z gleich x (§. 30)
und 2) z gleich y (§. 28)

L. Woran erkennt man, ob x und E gleich sind?

S. An den ihnen gegenüber stehenden Seiten AC und AE, wenn die gleich sind (§. 55)

L. Aber wie erfahren wir ob diese gleich sind?

S. AB : AC = DB : DC (Voraussz.)
Aber auch AB : AE = DB : DC (§. 246)

$$AC = AE$$
$$E = x \ (\S.\ 55)$$
$$z = x \ (\S.\ 30)$$
$$z = y \ (\S.\ 28)$$

L. Also wenn eine aus der Spitze eines Dreiecks gezogene Linie die gegenüber liegende Seite den beiden andern Seiten proportionirt schneidet . . ?

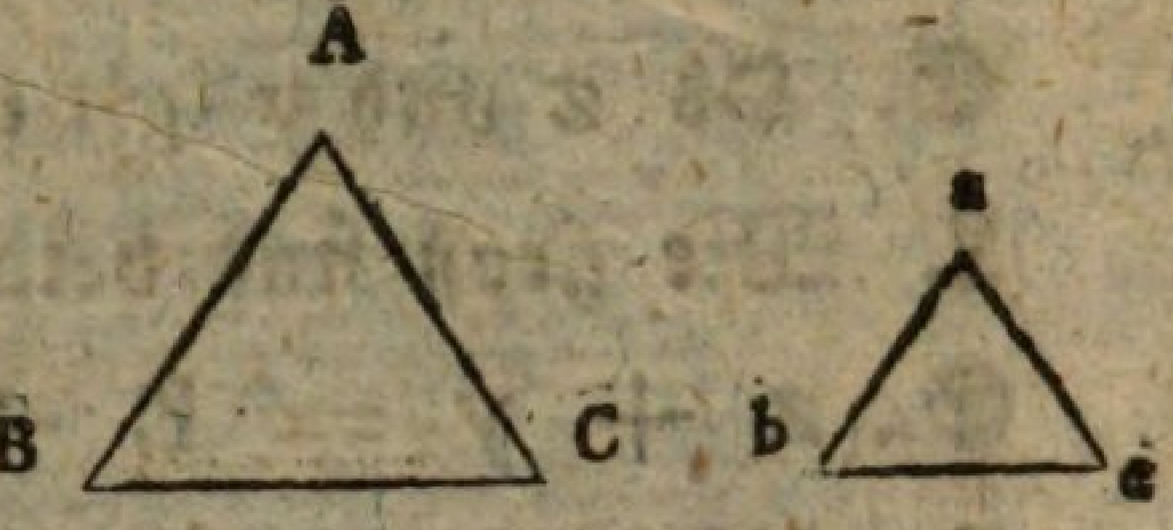
S. So halbirt sie auch den Winkel von dessen Spitze sie ausgeht.

Zwölf-

## Zwölfter Satz.

### § 257.

L. Es wird ein Dreiekk ABC nach Willkühr gezeichnet. Hierauf wird zu einem zweiten Dreiekke die GrundLinie bc, den vorigen ungleich, gezogen; an beide Enden, b und c, Winkel gelegt, die den Winkeln B und C des ersten Dreiekks gleich sind (§ 89); und die Schenkel derselben verlängert bis sie in a zusammen stossen. — Wie groß wird nun der dritte Winkel a seyn?

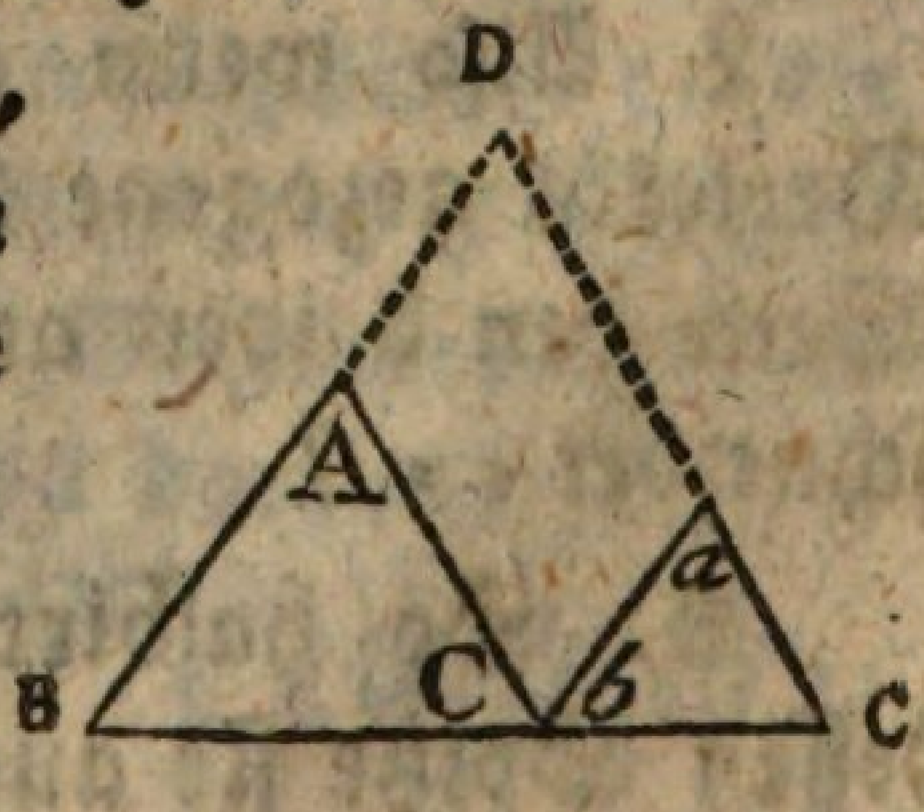



S. So groß wie A, dritter Winkel des Dreiekks ABC (§ 123).

L. Die Dreiekke ABC und abc sind sich also einander gleichwinklig, aber ungleichseitig. Die Seiten aber, welche gleiche Winkel einschliessen, sind einander proportionirt: nämlich

AB : AC = ab : ac
AB : BC = ab : bc
AC : CB = ac : cb

Um dieses zu erweisen werden zwei Seiten die gleichen Winkeln gegenüber stehn, wie BC und bc, gerädlinig an einander gesetzt, so daß BCbc = BC + bc. Hierauf werden über BC und bc Dreiekke gezeichnet, denen ABC und abc




gleich

gleich und ähnlich (§. 61, 87) Zuletzt werden die Seiten BA und ca verlängert, bis sie zusammen stossen in D. — Aber müssen sie das nohtwendig? Würden sie z. B. auch dan zusammen stossen, wenn der Winkel B rechtwinklig, oder gar stumpf wäre?

S. Dan wäre C = c spitz (§. 120), und beide zusammen, B + C = B + c kleiner als zwei rechte (§. 119); und müsten folglich BA und ca genugsam verlängert, endlich zusammenstossen. (§. 110)

L. Was ist nun aus der Zeichnung, oder der Voraussetzung zunächst bekant?

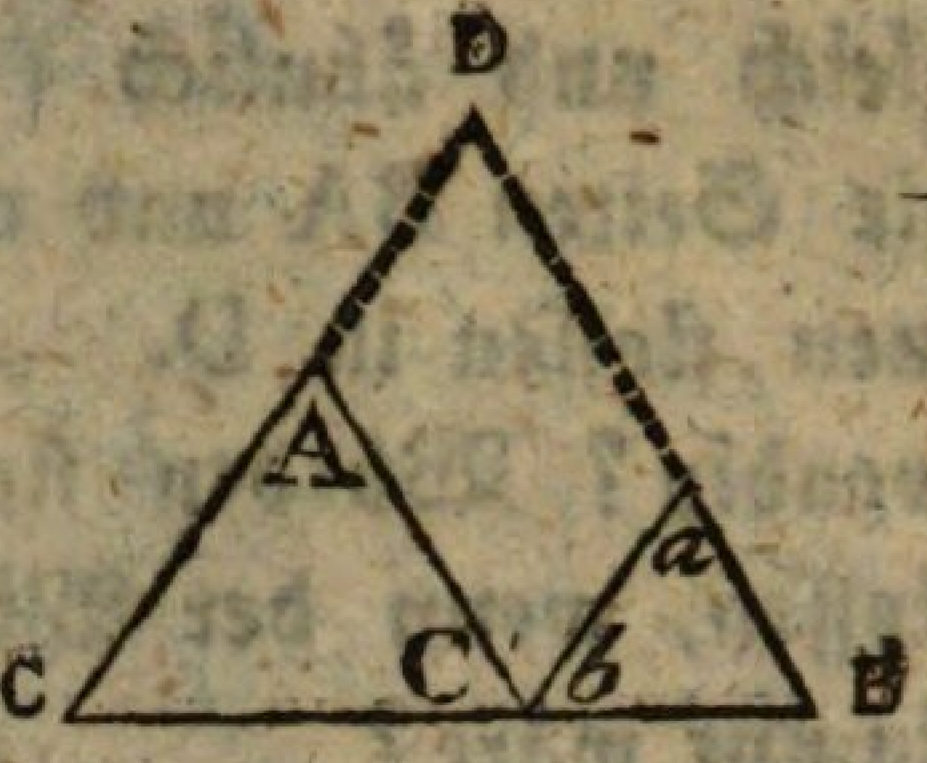
S. Daß $\angle A = \angle a$,
$\angle B = \angle b$,
und $\angle C = \angle c$,

L. Und welches ist die Folge aus der Gleichheit der Winkel B und b?

S. $B = b$ (Voraussetzung.)
$BD \# ba$ (§. 106)
$BC : bc = aD : ca$ (§246).

L. Und aus der Gleichheit von C und c folgt..?

S. $C = c$ (Voraussetzung.)
$cD \# CA$ (§. 106).
$AB : AD = BC : bc$ (§. 246)




L. Aber was haben wir mit AD und aD zu tuhn? Das sind ja nicht Seiten der Dreiekke ABC und abc.

S. Es muß erwiesen werden, daß AD und ab, aD und CA, einander gleich sind.

L. Das ist richtig: aber wie wird es bewerkstelligt?

S. In dem Vierekke AC aD sind die Gegen-Seiten gleichlaufend, wie schon erwiesen ist.

Folglich ist AC aD ein Parallelogramm (§ 129).

Folglich CA = aD und ab = AD (§ 131). Folglich kan man eins für das andre setzen.

Folglich AB : ab = BC : bc,
und BC : bc = CA : ca.
Folglich AB : ab = CA : ca (Ar. § 237).

L. Dreiekke also die einander gleichwinklig sind, haben auch ihre Seiten einander proportionirt. — Aber wie stehn sie in Proportion? Ist etwan AB zu AC gleich ab zu bc?

S. Nein, sondern AB : AC = ab : ac; oder auch AB : ab = AC : ac. Die einander proportionirten Seiten müssen in beiden Dreiekken einerlei Lage haben: das heisst, gleichen Winkeln gegenüber stehn, oder gleiche Winkel einschliessen, wie AB und ab, AC und ac, BC und bc.

L. Recht! Und Seiten wie AB und ab, AC und ac, die in ähnlichen Figuren gleichen Winkeln gegenüber stehn, nennt man gleichnamig oder gleichliegend.

§ 258.

L. Woran aber lassen sich DreiEkke, die einander gleichwinklig sind, und proportionirte Seiten haben, unterscheiden?

S. An nichts als ihrer Grösse.

L. Und Dinge die durch nichts als ihre Grösse zu unterscheiden sind, heissen : : ?

S. Aehnlich. (§ 18)

L. Man kan also obigen Satz (§ 257) auch kürzer ausdrücken. Und wie?

S. Einander gleichwinklige DreiEkke sind ähnlich.

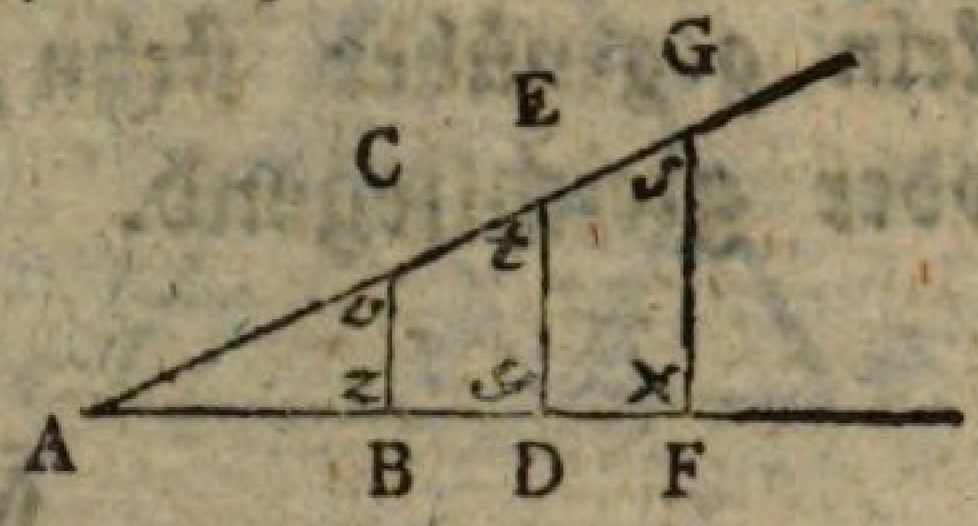
L. Können aber DreiEkke wol ähnlich seyn, ohne proportionirte Seiten und gleiche Winkel?

S. Nein, man würde sie daran unterscheiden (§ 18)

L. Also ähnliche DreiEkke sind einander gleichwinklig, und haben proportionirte Seiten.

§ 259.

L. Es wird ein Winkel A, nach Willkühr gezeichnet; und von einem Schenkel zum andern werden gleichlaufende Linien BC, DE, FG, in willkührlicher Entfernung, gezogen. — Sind die auf solche Art entstandenen Dreiecke ABC, ADE, AFG einander gleichwinklig, oder nicht?




S. Sie sind gleichwinklig: denn

$$\frac{BC \;\#\; DE \;\#\; FG \quad \text{(Voraussſ.)}}{\left.\begin{matrix} z = y = x \\ v = t = s \end{matrix}\right\} \text{(§ 113)}}$$

Den dritten Winkel A aber haben sie gemein.

L. Und die Folge dieser Gleichwinkligkeit ist ..?

S. Daß AB : BC = AD : DE = AF : FG (§ 257)
Oder AB : AD : AF = BC : DE : FG (A. § 242)

L. Das heisst ..?

S. Gleichlaufende Linien, welche die Schenkel eines Winkels schneiden, sind den Abschnitten derselben proportionirt.

§ 260.

L. Gesetzt es wäre, in voriger Zeichnung, AB = BD = DF; wie würden dan die gleichlaufenden Linien, BC, DE, FG, sich zu einander verhalten?

S. Wenn AB = BD = DF
so ist AD = 2 AB
und AF = 3 AB

Nun

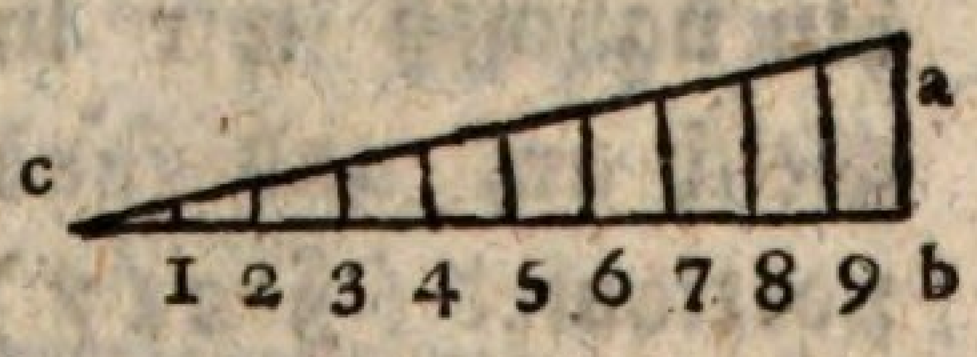
Nun ist AB : AD = BC : DE (§ 258)
Oder AB : 2AB = BC : 2BC (A. § 243)
Desgleichen AB : AF = BC : FG (§ 258)
Oder AB : 3AB = BC : 3BC (A. § 243)
Ist also AD = 2AB, und AF = 3AB;
so ist auch DE = 2BC, und FG = 3BC.

L. Ganz recht!
Ist BC = 1,
so ist DE = 2,
FG = 3.
Nimt man FG für 1 an ..?

S. Ist FG = 1 = $\frac{3}{3}$
so ist DE = $\frac{2}{3}$
und BC = $\frac{1}{3}$

L. Das leitet auf eine zweite Art, eine gegebene gerade Linie in so viel gleiche Teile zu teilen als verlangt wird: oder: Linien zu finden, welche eine bestimmte Anzahl gleicher Teile einer gegebenen Linie darstellen. Z. B. es wird gegeben eine Linie ab, und verlangt sie in Zehn Teilen darzustellen. Das heisst: Linien zu finden, die $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ ꝛc ab ausmachen.

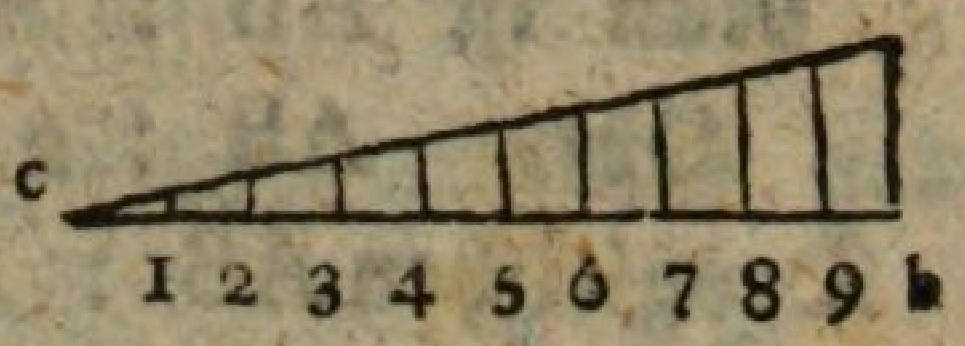
S. Dan setze ich an das eine Ende a der gegebenen Linie ab, eine unbestimmte Linie; trage auf diese zehn willkührliche gleiche Teile von a nach 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, c.




Hierauf ziehe ich die Linie bc: und endlich gleich-

 lau-

laufende Linien mit ab, aus allen Teilungs-Punkten von ac, bis an bc. So ist




Die gleichlaufende Linie 1 = $\frac{1}{10}$ ab

" " 2 = $\frac{2}{10}$ "

" " 3 = $\frac{3}{10}$ "

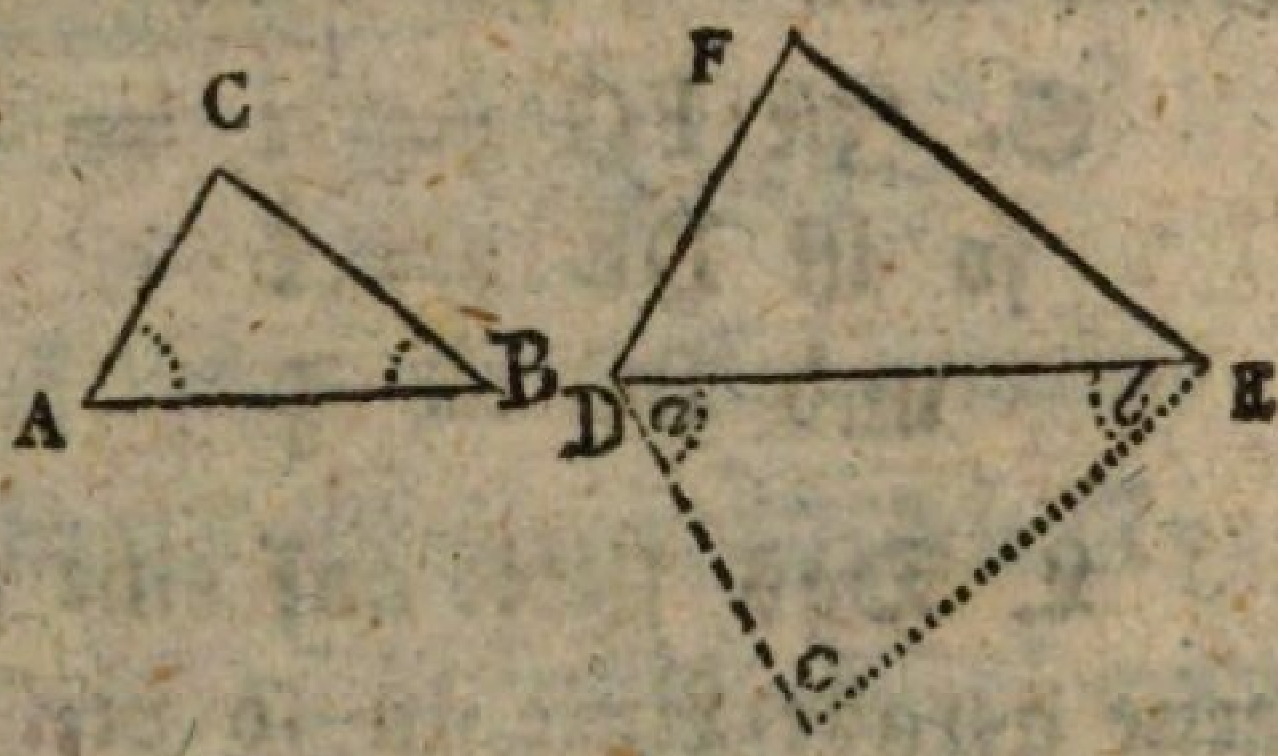
" " 4 = $\frac{4}{10}$ "

u. s. w.

## Dreizehnter Satz.

### § 261.

L. Zuerst wird ein DreiEkk ABC, nach Willkühr, beschrieben. Darauf ein zweites DEF, so daß seine Seiten den Seiten des vorigen proportionirt seien. — Was will das eigentlich sagen " " ?




S. Es soll seyn AB : DE = AC : DF = BC : EF

L. Wenn wir also DE = $1 + \frac{1}{2}$ AB machen, so werden DF und EF " " ?

S. Dan wird DF = $1 + \frac{1}{2}$ AC

und EF = $1 + \frac{1}{2}$ BC.

L. So wollen wir sie denn machen. — Vorhin nahmen wir in beiden DreiEkken die Winkel gleich an, und fanden dan auch die Seiten proportionirt (§ 217). Hier ist es umgekehrt. Hier sind die Seiten proportionirt angenommen; und

nun

nun ist die Frage: Ob auch die gleichliegenden Winkel einander gleich sind? — Um sie zu beantworten legen wir an D, auf der entgegenliegenden Seite von F, einen Winkel a, gleich A; und an E, auf eben der Seite, einen Winkel B gleich B (§ 89). — Werden die Schenkel dieser Winkel auch zusammen stossen?

S. Ja: denn a + b = A + B sind zusammen kleiner als zwei rechte Winkel (§ 119), und müssen folglich zusammen treffen (§ 110).

L. Der Punkt, wo sie zusammentreffen, heisst c — Wie groß ist ist nun der Winkel c?

S. $\angle c = \angle C$ (§ 123).

L. Die DreiEkke ABC und DEc sind also einander gleichwinklig. Und was ist die Folge daraus?

S. Daß AB : AC = DE : Dc
und AB : BC = DE : Ec } § 257)

L. Nun aber ist, nach der Voraussetzung,
AB : DE = AC : DF = BC : EF
Oder AB : AC = DE : DF
und AB : BC = DE : EF } (A. § 242)

S. Folgl. DE : DF = DE : Dc
und DE : EF = DE : Ec } (A. § 237)

DF = Dc
EF = Ec } (§ 254*)

da nun auch DE = DE

so ist △DEF ≌ △DEc (§ 61)

$$\left.\begin{array}{l} \angle FDE = a = A \\ \angle FED = b = B \\ \angle F \;\;\;\; = c = C \end{array}\right\} (\S\ 18)$$

$$\triangle DEF \backsim \triangle ABC\ (\S\ 258)$$

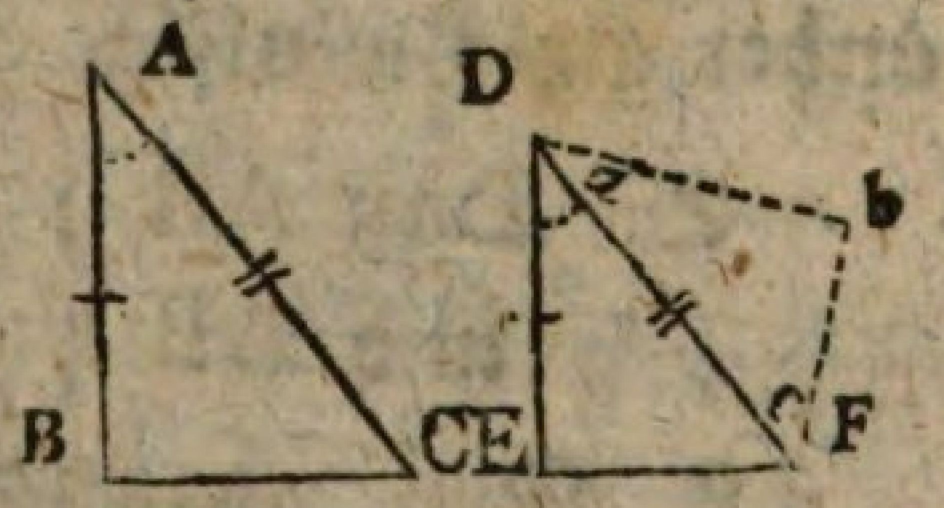
L. Also wenn die Seiten zweier DreiEkke einander proportionirt sind , , ?

S. So sind die DreiEkke einander gleichwinklig, oder ähnlich.

## Vierzehnter Saz.

### §. 262.

L. Es wird ein Dreiekk ABC, nach Willkühr, verfertigt. Hierauf ein zweites DEF, dessen einer Winkel D gleich einem Winkel A; und die ihn einschliessenden Seiten DE, DF proportionirt den Seiten AB, AC, des ersten DreiEkks. — Was ist nun von diesen beiden DreiEkken bekant?




S. Daß $\angle A = \angle D$

und $AB : DE = AC : DF$

oder $AB : AC = DE : DF$ (A. § 242)

L. Von einem Winkel wissen wir also nur daß er in beiden Dreiekken gleich ist: solten die andern es auch wol seyn? Solten wol B und E, C und F auch einander gleich seyn? — An D wird ein Winkel a = A, und an F ein Winkel c = C, gelegt

legt (§ 189) deren Schenkel einen dritten Winkel b bilden (§ 110, 119). — Wie groß wird dieser Winkel b seyn?

S. b $\angle = \angle$B (§ 123)

L: Die Dreiekke ABC und DbF sind also gleichwinklig. Und was folgt daraus?

S. Daß bD : DF = BA : AC = ED : DF (V.)

$bD = ED$

$\triangle DFb \cong \triangle DFE$

$(b = B = E)$

$(C = c) = \angle DFE$

$\triangle DFb \sim \triangle ACB$

(§ 257, § 254, *) § 54, § 18, § 258)

L. Also wenn zwei DreiEkke einen Winkel gleich, und die ihn einschliessenden Seiten proportionirt haben; so sind sie einander ähnlich, das heisst . . ?

S. Sie sind einander gleichwinklig, und haben proportionirte Seiten (§ 261).

## §. 263.

L. Jezt sind alle AehnlichkeitsFälle der DreiEkke vorgewesen; wir wollen daher eine Uebersicht derselben anstellen, so wie wir ehemals über ihre Gleichheit und Aehnlichkeit, Musterung hielten (§ 93). — Wie viel gibt es AehnlichkeitsFälle? Und welche sind die Fälle, aus denen sich auf Aehnlichkeit schliessen lässt?

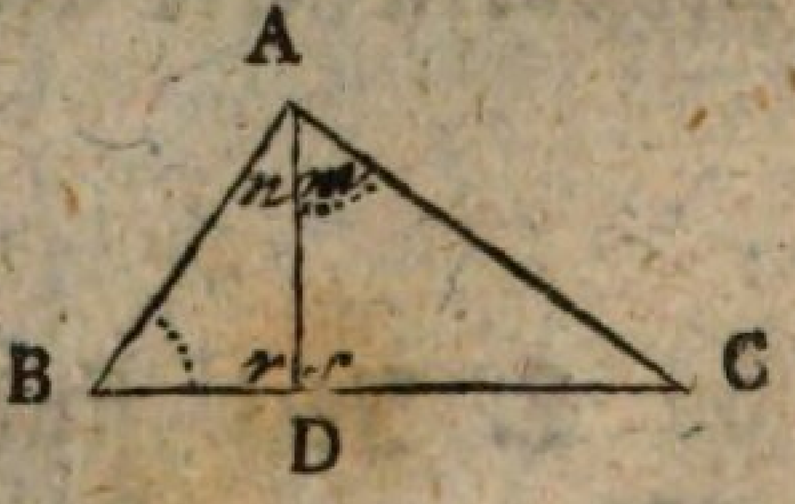
S. 1) Drei gleiche Winkel (§ 258)
2) Drei proportionirte Seiten (§ 261)
3) Zwei proportionirte Seiten, mit einem dazwischen liegenden gleichen Winkel (§ 262).

L. Es gibt also gerade so viele KennZeichen der Aehnlichkeit, als es MerkMale der Gleichheit und Aehnlichkeit gibt: und die Fälle selbst haben auch eine auffallende Aehnlichkeit: vornehmlich die beiden lezten hier, mit den beiden ersten dort (§ 93). — Ja was noch mehr, es gibt, so wie dort (§. 94), einen viertenAehnlichkeits:, so auch hier einen vierten GleichheitsFall, der nur unter gewissen Einschränkungen Stat findet. (Man sehe Euklides VI, 7) und den wir so wie jenen, übergehn.

## Funfzehnter Saz.

### § 264.

L. Es wird ein rechtwinkliges DreiEkk, nach Willkühr verzeichnet: und aus der Spitze des rechten Winkels A, wird auf die gegenüber stehende Seite BC eine senkrechte Linie AD gezogen. — Dan haben wir drei Dreiekke: ABC, ADB und ADC: Die Frage ist: Sind sie einander ähnlich, oder nicht? — Was wird von DreiEkken erfordert um ähnlich zu seyn?




S.

S. Sie müssen einander gleichwinklig seyn, und proportionirte Seiten haben (§ 258).

L. Es kömt also drauf an, ob sich die Merk-Male § 263 an diesen DreiEkken finden. — Zuerst wollen wir die DreiEkke ABC und DBA mit einander vergleichen.

S. ∠A = ∠ADB (§ 48) den wir r nennen wollen (§ 48)
B = B, oder beiden gemein;
C = ∠BAD (§ 123) den wir n nennen wollen.

△ABC ∽ △ DBA (§ 258)

L. Nun die DreiEkke ABC und DAC?

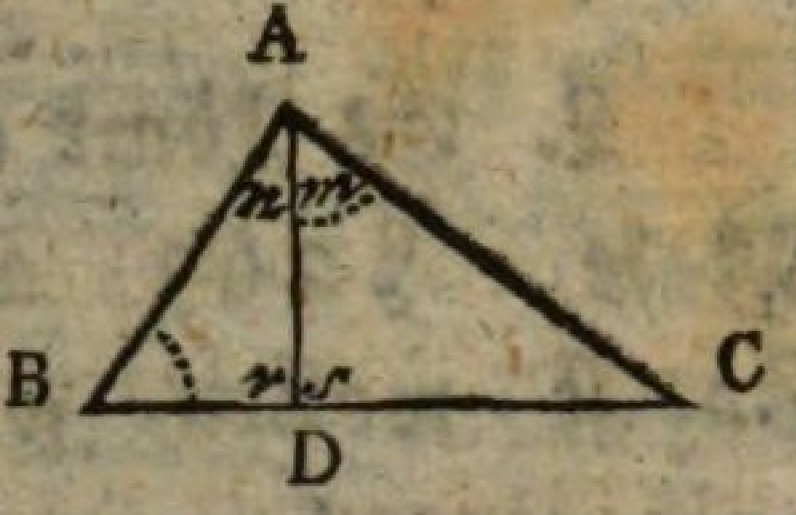
S. r = s (§ 47)
B = m (Bew.)
n = C (§ 123)
△DBA ∽ △DAC, (§ 258)

L. Also △DBA ∽ △DAC ∽ △ABC. — Wie heisst nun die Wahrheit, welche hierin liegt?

Ein rechtwinkliges DreiEkk wird durch eine aus der Spitze seines rechten Winkels, auf die gegenüberliegende Seite gezogene senkrechte Linie, in zwei DreiEkke zerschnitten, die nicht nur unter sich, sondern auch dem ganzen, ähnlich sind.

§. 265.

L. Aehnliche DreiEkke haben proportionirte Seiten (§ 258). Welches sind nun die Verhältnisse, die, z. B., dem




AB : AC

gleich sind?

S. AB : AC = DB : DA = DA : DC

L. Recht! Wie lässt die Proportion

DB : DA = DA : DC

sich noch auf andre Art ausdrükken?

DB : DA = DA : DC

ist eine stetige Proportion, und kan auch geschrieben werden.

÷ DB : DA : DC (A. § 232.)

L. In dieser Formel, verglichen mit der Zeichnung § 264, liegt wieder eine Wahrheit.

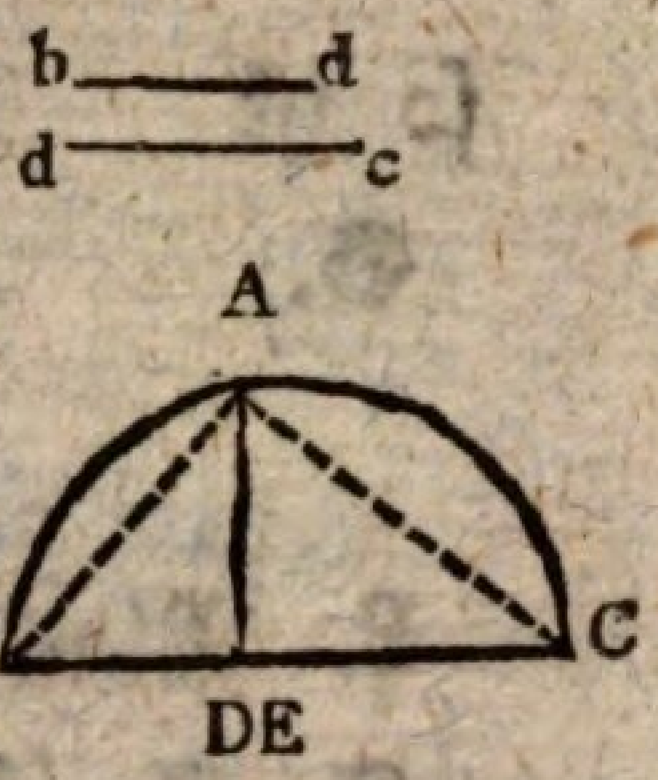
S. Eine aus dem rechten Winkel eines rechtwinkligen DreiEkks, auf die Gegen-Seite gezogene senkrechte Linie ist die mittlere ProportionalLinie zwischen den beiden Abschnitten dieser Linie, welche sie macht.

Sech-

## Sechzehnter Satz.

### § 266.

L. Es werden gegeben zwei Linien bd und dc; und es wird verlangt zwischen ihnen die mittlere geometrische ProportionalLinie anzugeben.




S. Ich setze die gegebenen Linien in gerader Richtung BDC an einander, und errichte aus ihrem VereinigungsPunkte D eine unbestimmte senkrechte Linie. — Jezt kömt es darauf an, von B u. C Linien zu ziehen, die auf dieser senkrechten Linie zusammen treffen, und einen rechten Winkel bilden.

L. Was ist der Winkel im HalbKreise für einer?

S. Ein rechter (§ 199) — Ich halbire BC in E (§ 65), und beschreibe über BC einen HalbKreis. Diesen schneidet die senkrechte Linie in A, und bestimmt ihre Länge DA.

L. Aber nun den Beweis, daß DA die verlangte mittlere ProportionalLinie sei!

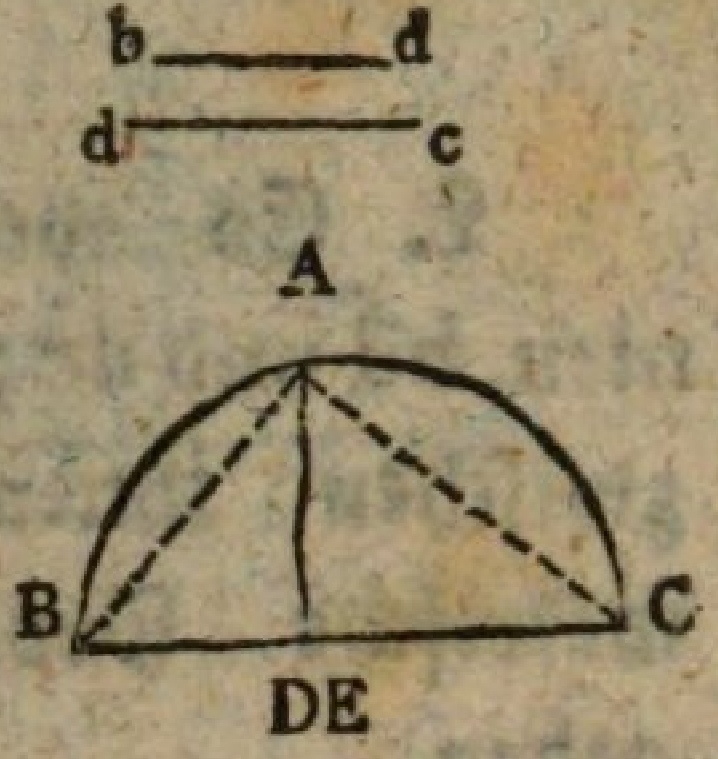
S. Ich ziehe die Linien AB und AC: so ist A ein rechter Winkel (§ 199); ABC ein rechtwinkliges Dreiekk; AD eine aus demselben auf die entgegenstehende Seite gefällte senkrechte Linie (Vorauss.): folglich AD die mittlere geometrische ProportionalLinie zwischen BD = bd, und DC = dc (§ 265.)

S.

§ 267.

L. Es sei bd = BD = m,
dc = DC = n;
so ist AD = ?

S. AD = $\sqrt{(mn)}$
(Ar. § 240)




L. Nimt man nun m = 1, = ?

S. So ist $\sqrt{(mn)} = \sqrt{(1n)} = \sqrt{n}$ = AD.

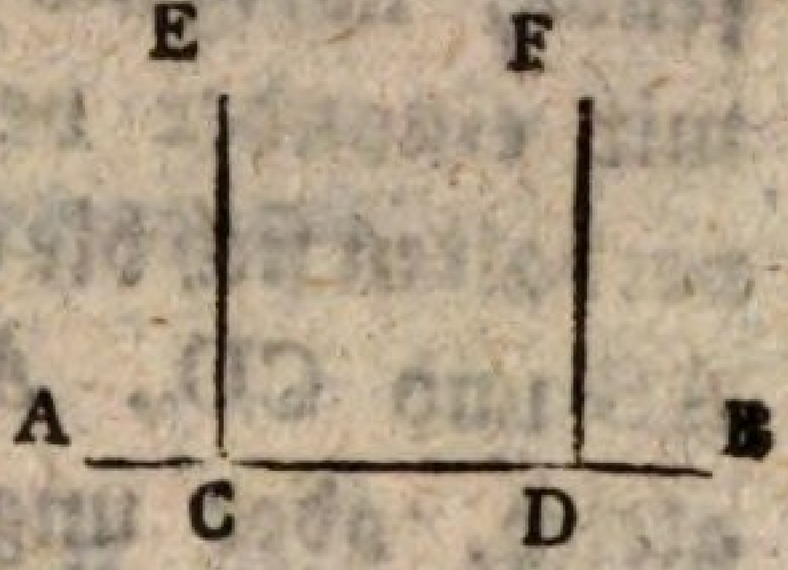
L. Hieraus erhellt, daß man auch die QuadratWurzel in Linien ausziehn kan, und zwar ganz genau, welches die Arithmetik nicht zu leisten vermag.

Nach=

## Nachtrag zweier, im ersten Buche übergangener Sätze.

### § 268.

(Hinter § 107, als Zusatz, einzuschieben.)




L. Es wird eine beliebige gerade Linie AB gezogen, und aus zwei auf ihr willkührlich angenommenen Punkten C und D, werden senkrechte Linien CE und DF errichtet (§ 67) — Wie groß sind nun die Winkel ECD und FCD einzeln, und zusammen genommen?

S. $\left.\begin{array}{l}\angle ECD = \lrcorner \\ \angle FCD = \lrcorner\end{array}\right\}$ (§ 47)

$\angle ECD + \angle FCD = 2 \lrcorner$

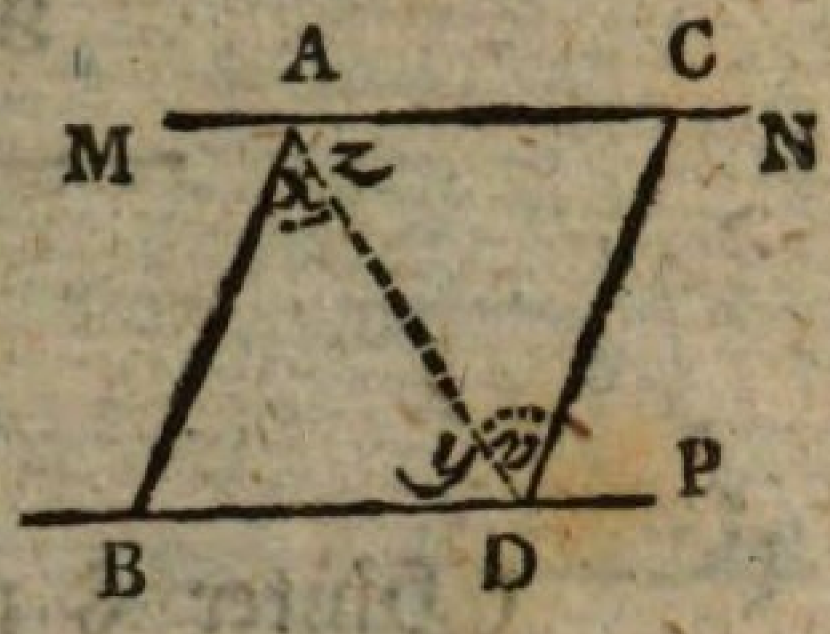
EC $\#$ CD (§ 107).

L. Das heisst . . ?

S. Linien, die auf einer andern senkrecht stehn, sind gleichlaufend.

§. 269.

(Hinter § 112, als ein besondrer Satz, einzuschieben.)




L. Es werden zwei gleichlaufende Linien MN, OP nach Willkühr gezogen, diese werden durch zwei andre gleichlaufende, übrigens auch willkührliche Linien AB, CD, mit einander verbunden. — Die Frage ist: Wie verhalten sich die einander gegen überstehenden Linien, AB und CD, AC und BD zu einander? Sind sie gleich, oder ungleich? — Wir wollen eine Hülfs-Linie AD ziehn; der Bequemlichkeit wegen, die WechselWinkel mit z und y, x und v bezeichnen; und nun die Dreiekke ADB und ADC vergleichen.

S. AC $\#$ BD
und AB $\#$ CD } (Vorauss.)

folglich z = y
und x = v } (§ 112)

da nun auch AD = AD

so ist $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ (§ 92)

AB = CD
AC = BD } (§ 18).

L. Das heisst . . ?

S. Gleichlaufende Linien, zwischen gleichlaufenden Linien sind gleich.

L. Oder bestimmter: Gleichlaufende Linien, die von einerlei gleichlaufenden Linien begrenzt werden, sind gleich.

An-

# Anfangsgründe

der

# Geometrie.

---

## Viertes Buch.

## Anwendung

der

bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie.

# Ausübende Geometrie.

§ 270.

1. Die Geometrie ist eigentlich eine praktische Logik, oder eine ausübende Vernunft-Kunst: das heisst, sie lehrt, durch Muster und Beispiele, wie man von einfachen, bekanten, und unbestrittenen Wahrheiten sich zu zusammengesezten, unbekanten, schwerer einzusehenden, erheben, und den hartnäkkigsten Zweifler, wenn er die Richtigkeit der Voraussezungen zugegeben, zwingen könne auch die lezten einzugestehn. (§ 21). Ausser diesem ersten und eigentlichen HauptZwekk aber findet die Geometrie noch mannichfältige Anwendung, nicht nur in Künsten und Wissenschaften, sondern auch im bürgerlichen Leben. Um davon einen Vorschmakk zu geben, wollen wir jezt ihre Anwendung auf das FeldMessen zeigen; so weit, nämlich, die bisher vorgetragenen Lehren es gestatten.

## Erster Saz

### § 271.

L. Auf dem Felde eine gerade Linie zu ziehn, bedient man sich einer Schnur. Ist die Linie aber zu lang für eine Schnur, so bezeichnet man ihre EndPunkte, A und B, durch senkrecht eingestekkte Stäbe, zwischen welche man dem-

nächst andre, so viel deren erfodert werden C, D ꝛc. pflanzen kan. — Wie wird das bewerkstelligt? Wie bringt man einen Stab C, mit zwei andern Stäben, A und B, in gerade Richtung?

S. Ich trete an das eine Ende der Linie, so daß der vordere Stab, A, mir den hintern, B, verdekkt, und lasse nun, durch einen Gehülfen, der auf meine Winke achten muß, den dritten Stab, C, so einstekken, daß auch er durch den vordersten A verdekkt werde.

L. Das ist ganz recht. Mehrer Genauigkeit wegen, ist noch nötig, nicht zu dichte an A zu treten, damit A nicht dem Auge zu grossen Raum vorstekke. — Daß man auch mit den beiden vordersten Stäben, A und C einen dritten D und vierten B, u. s. w. ohngefähr auf gleiche Art in gerade Richtung bringen könne, braucht kaum erinnert zu werden.

Soll

Soll die Linie auf dem ErdBoden kenbar gemacht werden; so kan man eine Schnur von einem Stabe zum andern ausspannen, und längs derselben graben, oder kratzen.

Daß man auf eben diese Art eine gegebene Linie, nach eben der Richtung verlängern könne, versteht sich von selbst.

## Zweiter Satz.

### § 272.

L. Die Geometer pflegen zu ihren Messungen, zehnteiliges, oder DecimalMaß zu gebrauchen. Sie teilen nämlich das Ganze, wie die Rute, die Toise, oder was man sonst dafür annehmen will, in 10 gleiche Teile, oder DecimalSchuh; den DecimalSchuh in 10 DecimalZoll; den DecimalZoll in 10 DecimalLinien, die DecimalLinie in 10 Scrupel u. s. w. Die Bezeichnung der DecimalTeile ist wie sie in der Arithmetik (§ 195.) gelehrt worden. So würde, z. B.,

54,835

heissen . . ?

S. 54 Ruten, 8 Schuh, 3 Zoll, 5 Linien.

L. Und 0,92?

S. Bedeutet 9 Schuh 2 Zoll.

L. Die Bezeichnung kan auch nach Arithm. § 198 geschehn:

54835 ‴

— 92 ″

Zu merken ist jedoch, daß man, der Kürze wegen, das SubtraktionsZeichen (—) hier wegzulassen, und zu schreiben pflegt:

54,835‴

0,92″

## Dritter Saz.

§ 273.

L. Zum Messen gerader Linien auf dem Felde bedient man sich einer Stange, einer Kette, oder einer Schnur, auf welcher das Maß, welches man gebrauchen wil, mit seinen Abteilungen, bemerkt ist. Die Schnüre pflegen von der Nässe einzulaufen, und sind daher nicht sehr zu empfehlen; Ketten sind, auf ebenem Boden, und bei weiten Vermessungen, am bequemsten. Beim Gebrauch derselben sind zwei Gehülfen nötig, von denen der Vorderste, welcher die Kette führt, mit Pflökken versehen seyn muß, um bei jeder KettenLänge einen davon in die Erde zu stekken, der von dem Nachfolgenden aufgesammelt wird.

Ist der Boden ungleich und wird große Genauigkeit erfordert; so sind Stangen geschikter als Ketten; weil es schwer halten würde leztere in die ersoderliche Lage zu bringen, welches mit dem erstern weit leichter angeht.

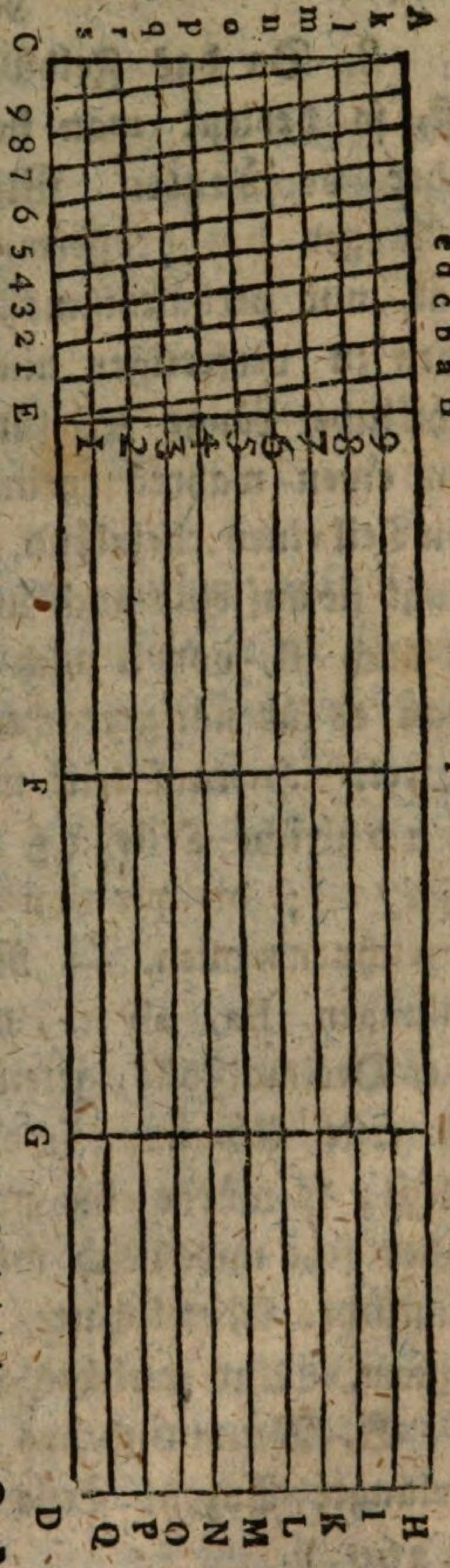
## Vierter Satz.

§ 274.

L. Da das FeldMaß für das Papier zu groß ist, so bedient man sich hier eines verkleinerten oder verjüngten MaßStabes, der alle Abteilungen des grössern, auf dem Felde üblichen, hat, nur verhältnißmäßig kleiner. Um einen solchen zu verfertigen nimt man eine beliebige oder schikliche Länge AB für ein Ganzes an, (wir wollen einen wahren rheinländischen Zoll, den zwölften Teil eines rheinländ. Schuhes, dafür nemen) und trägt sie auf eine noch unbestimmte gerade Linie von A nach B, von B nach I, von I nach II rc. so oft man es für nötig erachtet, oder der Raum es gestattet. Hierauf teilt man ein äusseres Stükk AB, in 10 gleiche Teile, (§ 253) oder DecimalSchuhe (§ 272); die wir von B nach A, mit a, b, c, rc. bezeichnen wollen. — Nun solte jede dieser UnterAbteilungen, Ba, ab rc., wieder in 10 gleiche Teile, oder DecimalZolle, geteilt werden (§ 272): da aber die erste Abteilung schon ziemlich klein auszufallen pflegt; so würde eine zweite noch viel kleiner, und daher sehr undeutlich werden, wenn man nicht ein künstliches Mittel hätte, dieser Schwirigkeit zu begegnen. Und welches ist das?

S. Vermutlich das: Linien zu finden, die eine verlangte Anzahl Teile einer gegebenen darstellen (§ 260.)

L. Recht! Ehe wir aber Gebrauch davon machen, sind einige Vorstellungen nötig. —



Aus den Punkten A,B, I, II ꝛc. werden senkrechte Linien von unbestimmter Länge errichtet. (§. 67) Auf zwei dieser Linien, (am bequemsten auf die beiden äussersten), trägt man 10 willkührliche, aber gleiche Teile, etwa von der Grösse Ba, von A bis k, von k bis l, von l bis m ꝛc. desgleichen von III bis H, von H bis I, von I bis K ꝛc. u zieht hierauf von jedem dieser Teilungs Punkte, zu dem ihm gerade überstehenden, eine gerade Linie kH, lI, mK ꝛc. von welchen die äusserste, CD, die Länge der senkrechten, AC, BE, IF, IIG ꝛc. bestimmt. — Sind diese zulezt gezogenen Linien kH lI, mK ꝛc. alle mit AIII gleichlaufend?

S. Ja, denn sie sind alle in zwei Punkten gleich-

weit

weit von ihr entfernt (§ 83); folglich gleichlaufend mit ihr (§. 97, 98).

L. Aber sind sie auch einander gleichlaufend?

S. kH ⋕ AIII
und lI ⋕ HIII
―――――――――
kH ⋕ lI (§ 116.)

Und auf eben die Art läßt sich der Beweis von den übrigen mI, nK ꝛc. führen.

L. Wir wollen die Durchschnitts-Punkte der zweiten senkrechten Linie BE, mit 9, 8, 7 ꝛc. bezeichnen. — Sind nun alle Stükke der gleichlaufenden Linien, welche zwischen einerlei senkrechten liegen, wie k9, l8, m7 ꝛc.; oder kH, lI, mK ꝛc. gleich lang?

S. Ja: denn AC ⋕ BE ⋕ IF, ⋕ IIID (§ 268)
―――――――――
AC ⋕ IF ⋕ BE ⋕ IIID (§ 116)
―――――――――
k9 = l8 = m7 ꝛc. }
kH = lI = mK ꝛc. } (§ 269)

L. Aber sind auch alle Teile der senkrechten Linien, die zwischen einerlei gleichlaufenden enthalten sind, wie Ak, B9, IIG oder Al, B3, IIIH ꝛc. einander gleich?

S. Da die senkrechten Linien AC, BE, IF ꝛc. zugleich gleichlaufend sind (§ 268); so sind die zwischen ihnen enthaltenen Stükke der gleichlaufenden, gleich lang (§ 269.).

L. Bis jezt haben wir erst Ganze AB und Zehn-Teile, ka. Nun fehlen uns noch HundertTeile. Wie erhalten wir die?

S. Ich ziehe eine Linie von E nach a, so sind die zwischen EB und Ea enthaltenen Stükke der gleichlaufenden Linien, ZehnTeile von Ba, (§ 260.) oder HundertTeile von BA.

L. Ganz recht. Um nun den verjüngten MaßStab zu vollenden, werden aus allen TeilungsPunkten von AB gleichlaufende Linien mit Ea gezogen, die wir schräge Linien nennen u. da wo sie die Linie EC berühren, mit 1, 2, 3 ꝛc. bezeichnen wollen. — Sind nun alle zwischen einerlei schrägen Linien enthaltenen gleichlaufenden Linien wieder gleich lang?

S. Ja; weil die schrägen zugleich gleichlaufend sind; so sind die dazwischen liegenden gleichlaufenden gleich lang (§. 269)

## Fünfter Saz.

### § 275.

L. Der Gebrauch dieses verjüngten Maßstabes ergibt sich aus seiner Verfertigung, und

§.

§ 272. — Gesetzt eine Länge CE = EF gelte eine Rute, was gilt dan E1?

S. Gilt CE eine Rute, so gilt E1 $\frac{1}{10}$ Rute, oder einen DecimalSchuh.

L. Und die kleinste, zwischen Ea und EB enthaltene Abteilung?

S. Ist $\frac{1}{10}$ EA = $\frac{1}{100}$ EC, oder ein DecimalZoll.

L Wenn nun, nach dieser Annahme, eine Länge von 2 Ruten 4 Schuh solten genommen werden?

S. So setze ich die eine ZirkelSpitze in G, die andre auf EC, in 4.

L. Gesetzt aber es würden noch 3 Zoll drüber, oder 2 Ruten, 4 Schuh, 3 Zoll verlangt?

S. So gehe ich mit beiden ZirkelSpitzen drei Linien aufwärts; setze nämlich die eine in den Punkt wo IIG und qO. u. die andre in den wo q3 und e4 sich schneiden.

L. Wie aber wenn man die Länge einer gegebenen Linie RS wissen wolte? R———————S

S. So fasse ich sie zwischen die ZirkelSpitzen, setze eine derselben in F, die andre auf EC, und be-

bemerke daß sie zwischen 2 und 3 trift. Ich gehe also mit beiden Spitzen gleichförmig aufwärts, so lange bis die zweite einen DurchschnittsPunkt einer gleichlaufenden, und einer schrägen Linie trift. Hier ist es der, den p4 und c2 mit einander machen. Es ist also die Länge der Linie RS =1,24 oder 1° 2′ 4″; das heisst 1 Rute, 2 Schuh, 4 Zoll.

L. Wenn man aber AB=BI für 10 Ruten annähme, welches würde dan das Maß von RS seyn?

S. Dan wäre es 12,4; das heisst 12 Ruten, 4 Schuh.

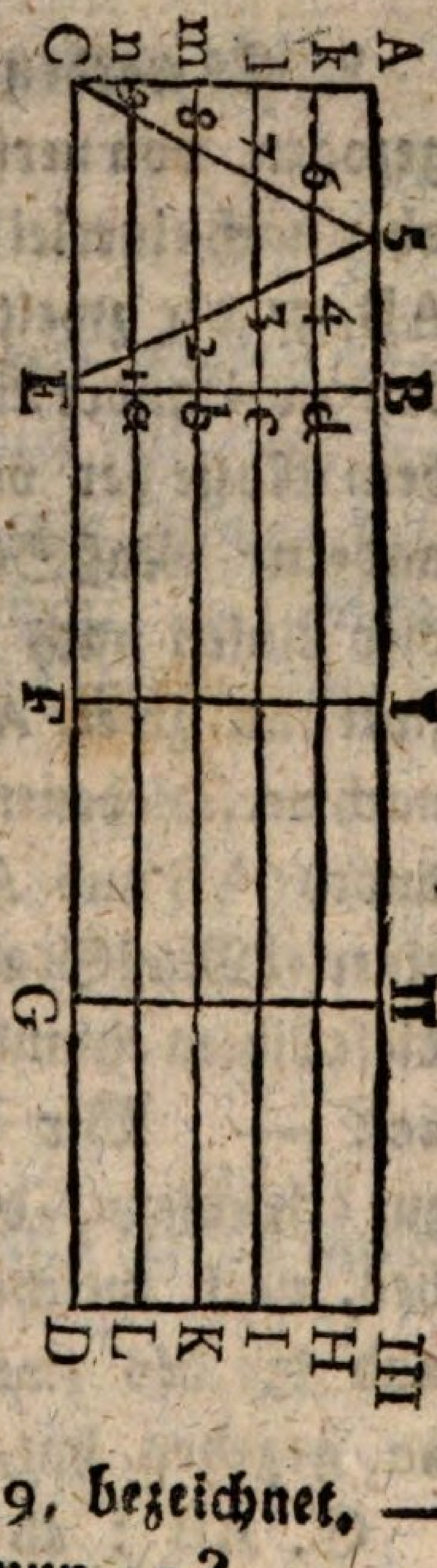
L. Aber AB für einen Schuh genommen?

S. Wäre RS=0,124 oder einen Schuh, 2 Zoll, 4 Linien.

## Sechster Satz.

### §276.

L. Wenn keine HundertTeile erfodert werden, kan man leichter einen verjüngten Maßstab verfertigen, wie folgt. — Zuerst trägt man auf eine unbestimmte Linie das Ganze, AB, BI, BII ꝛc. (Wir nehmen einen halben pariser Zoll dazu). Dan errichtet man aus A, B, I, II ꝛc. senkrechte Linien wie vorhin. (§274) Auf die beiden äussersten dieser Linien trägt man nur fünf gleiche Teile von A nach k, nach l, nach m, nach n, nach C, und von III nach H, nach I, nach K, nach L und nach D; um die gleichlaufenden Linien kH, lI, mK, nL, oM zu ziehn. Hierauf wird die Weite AB in zwei gleiche Teile geteilt in 5. Zulezt werden die Linien 5C und 5E gezogen, und die DurchschnittsPunkte dieser Linien von E nach 5, mit 1, 2, 3, 4; von 5 nach C aber mit 6, 7, 8, 9, bezeichnet. — Der wie vielste Teil von B5 ist nun a1?



S. a1 = $\frac{1}{5}$ B5 (§ 260).

L. Und der wie vielste Teil von AB?

S. a1 = $\frac{1}{5}$ B5 = $\frac{1}{10}$ AB.

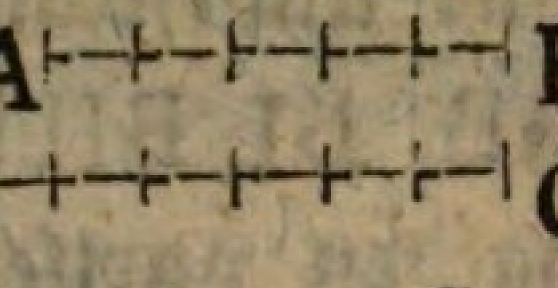
L.

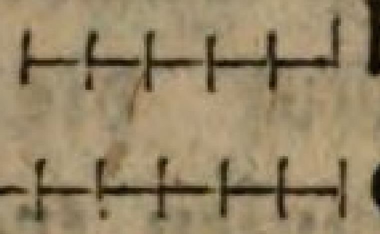
L. Eben so leicht zu verstehn sind die übrigen Abteilungen: $b2 = \frac{2}{10} AB$, $c3 = \frac{3}{10}$, $d4 = \frac{4}{10}$, $5B = \frac{5}{10}$, $d6 = \frac{6}{10}$, $c7 = \frac{7}{10}$ rc.

## Siebenter Satz.

### § 277.

L. Es werden zwei Linien AB, AC, gezogen, von verschiedenem Masse, aber nach einerlei MaßStabe. Wir wollen der ersten, AB, 5′ der zweiten, AC, 6′ geben. Hierauf werden zwei andre Linien ab, ac, gezogen, von dem Masse der vorigen, aber nach einem andern MaßStabe gemessen. — Da sind also vier Linien nach zweierlei MaßStäben, von denen zwei und zwei, AB und ab, AC und ac, einerlei Maß nach verschiedenen MaßStäben; und zwei und zwei andre (AB und AC, ab und ac) zweierlei Maß nach einerlei MaßStabe, enthalten. Die Frage ist: Sind diese Linien einander proportionirt? Ist AB : ab = AC : ac? — Wir wollen, um uns diese Untersuchun- zu erleichtern, die ZehnTeile des erstern MaßStabes, nach welchem AB und AC gemessen sind r; und die des zweiten, der das Maß von ab und ac gegeben hat, p nennen. So erhalten wir . . ?

A  B
A C

a  b
a c

S. $\left.\begin{array}{l} AB : ab = 5r : 5p = r : p \\ AC : ac = 6r : 6p = r : p \end{array}\right\}$ (A. § 235)

AB : ab = AC : ac (A. § 237)

L. Es ist wol klar, daß Maß und MaßStab hierbei ganz willkührlich sind. Wir würden eben

das Resultat erhalten haben, wenn wir z. B. AB und ab zu 6″ und 7″ angenommen hätte. — Also zwei nach einerlei Maßstabe gemessene Linien (AB, AC) und zwei andre, den vorigen an Maß gleiche, aber nach einem andern Maßstabe gemessene, (ab, ac) . . ?

S. Sind einander proportionirt: oder

AB : ab = AC : ac

§ 278.

L. Der Kürze wegen wollen wir künftig ein Par, nach zweierlei Masse gleich viel haltende, Linien einander gemäß nennen, und zum Zeichen der Gemäsheit wollen wir ⊔ gebrauchen. — Wie würde nun der vorige Satz auszudrükken seyn? Zuerst durch Zeichen?

S. AB ⊔ ab
AC ⊔ ac

AB : ac = AC : ac

L. Und nun mit Worten?

S. Zwei Par einander gemässe Linien sind proportionirt.

## Achter Satz.

§ 279.

L. Der vorige Satz umgekehrt: Vier Linien stehn in einer geometrischen Proportion:

AB : ab = AC : ac

Wer-

Werden sie, unter dieser Voraussetzung, auch die Eigenschaften der vorigen (276) haben? das heisst: Wenn man zwei derselben AB und ab in gleich viele gleiche Teile zerteilt, werden dan die andern beiden, AC und ac, auch gleich viele eben dieser Teile enthalten? zu verstehn AC nach dem MaßStabe von AB, und ac nach dem von ac.

Es sei:

Ein einzelner Teil von AB, desgleichen von AC = r
Ein einzelner Teil von ab, so wie von ac = p
Zahl der Teile von AB, so wie von ab = m
Zahl der Teile von AC = n

Die Zahl der Teile von ac ist noch unbekant, und mag vorläufig x heissen. — Worauf kömt es nun an? Oder was ist zu tuhn?

S. Die Zahl der Teile von ac zu finden, oder zu beweisen, daß x = n sei. — Es ist aber

$$\left.\begin{array}{rl} AB : ab = AC : ac \\ \text{oder } mr : mp = nr : xp \end{array}\right\} \text{(Voraussetzung)}$$

$$\text{Aber } xp = \frac{mpnr}{mr} \text{ (A. § 243) } = pn \text{ (A. § 72)}$$

$$x = n \text{ (A. § 235)}$$

L. Was ist also bewiesen?

S. Wenn vier Linien proportionirt sind; (AB : ab = AC : ac); so haben, nach zweierlei MaßStabe gemessen, zwei und zwei (AB und ab, AC und ac einerlei Maß.

L. Wenn also AB : ab = AC : ac
so ist AB ⊔ ab und ⊔ AC ac
Das heisst (nach § 278) . . ?

S. Proportionirte Linien sind einander gemäß.

§ 280.

Aehnliche Dreiekke haben proportionirte Seiten (§ 256); und proportionirte Seiten sind einander gemäß (§ 279): daraus folgt . . ?

S. In ähnlichen Dreiekken sind zwei und zwei Seiten (die gleichen Winkeln gegenüber stehn) einander gemäß.

L. Umgekehrt: Gemässe Linien sind proportionirt (§ 278); und drei par proportionirte Seiten bilden ähnliche Dreiekke (§.) Daraus folgt . . ?

S. Drei par gemässe Seiten machen ähnliche Dreiekke.

## Neunter Satz.

§ 281.

L. Die gewöhnlichsten Werkzeuge deren man sich zum Messen der Winkel auf dem Felde, oder zum Austragen derselben aufs Feld bedient, sind MeßTisch, Astrolabium und Boussole.

1) MeßTisch, oder Planchette, ist ein Tisch ohngefähr von der Grösse eines RegalBogens. Zu bequemerer Fortschaffung, und zu mancherlei Gebrauche, pflegt

er auf drei beweglichen, oben zusammengehenden Füssen so zu stehen, daß man ihn, ohne Verrükkung derselben, drehen und wenden; wagerecht, scheitelrecht, und schief stellen könne. Es gehört auch ein starkes Lineal dazu, ohngefähr so lang wie der Tisch, welches an beiden Enden mit Absehen, oder Diopteru, versehen ist, um dadurch zu zielen, oder zu visiren. Beim Gebrauch dieses Tisches wird ein Bogen Papier mit dem Rande aufgeklebt, oder angeheftet.

2) Astrolabium oder Feld-WinkelMesser, unterscheidet sich von dem WinkelMesser dessen man sich auf dem Papiere bedient, (§ 217) nur dadurch, daß er grösser ist; drei bewegliche Füsse hat, wie der MeßTisch; und vier Diopteru deren zweie zu beiden Seiten, an den Enden des HalbKreises, die beiden andern aber an einem um den MittelPunkt beweglichen Lineale, befestigt sind.

3) Boussole, oder MagnetKästchen ist ein kreisförmiges Kästchen, mit einer gläsernen Bedekkung, und einem in Grade abgeteilten Rande, in dessen Mitte eine MagnetNadel frei spielt. Es hat ein FußGestell wie MeßTisch und Astrolabium, und zwei einander gegenüberstehende Diopteru.

Alle drei WerkZeuge sind bei § 280 abgebildet, jedoch ohne Fuß, weil man den sich leicht vorstellen kan.

§ 282.

§. 282.

1. Es gibt zwar weit mehr WerkZeuge zum Winkel-Messen, als die hier beschriebenen, aber ihre Beschreibung würde, für unsern Zwekk, zu weitläufig seyn: auch wird der welcher mit den hier aufgeführten umzugehen weis, sich leicht zu helfen wissen, wenn ihm andre vorkommen solten.

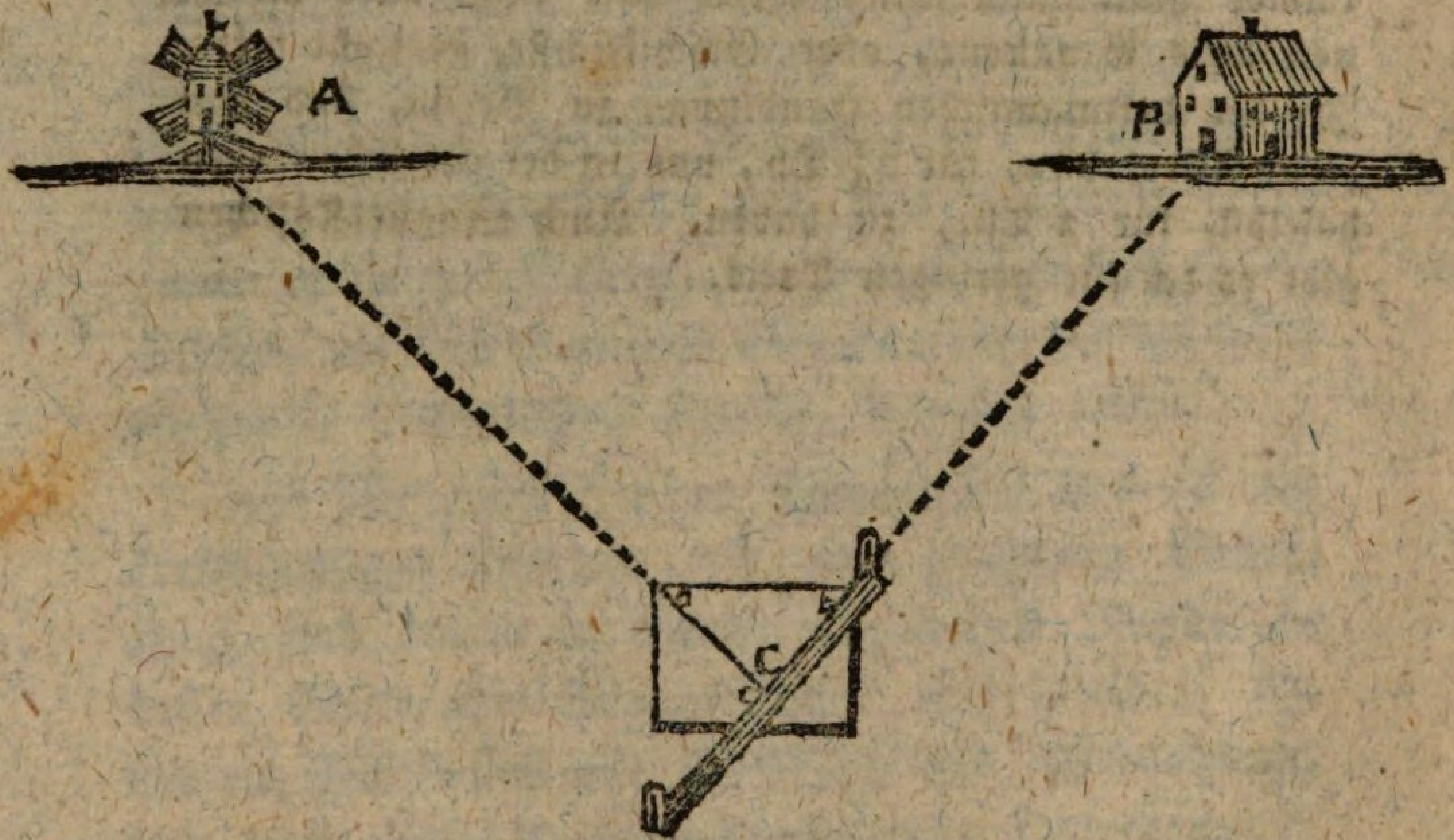
Zur Verständlichkeit, des Vorhergehenden sowol, als des Folgenden, wird es viel beitragen, wenn man die beschriebenen WerkZeuge wirklich zur Hand hat, und Versuche damit anstellen kan. MeßTisch und Astrolabium kan man sich allenfalls selbst machen, oder vom Tischler verfertigen lassen. Zum Versuchen werden sie immer hinlänglich seyn, wenn auch nicht alles an ihnen aufs Genaueste, oder Geschiklichste, gemacht wäre. In der heitmannschen Handlung, zu Berlin, sind hölzerne Astrolabien, für $2\frac{1}{2}$ Th., und in der catelschen eben daselbst, für 2 Th., zu haben. Auch MagnetKästchen gibt es da für geringen Preis.

## Zehnter Satz.

§ 284.

L. Die Grösse eines, auf dem Felde gegebenen Winkels ACB in Graden anzugeben; wie wird das zu bewerkstelligen seyn? und zwar zuerst

mit dem MeßTische.



S. Ich setze den Tisch wagerecht über C; bemerke auf demselben, lotrecht über C, einen Punkt c; stekke in c eine Nadel, oder einen Stift; lege an solches das Lineal (§ 278); ziele durch die Dioptern, bis ich durch beide zugleich den GegenStand A erblikke; ziehe, an dem in dieser Richtung festliegenden Lineal, die Linie ca; drehe das Lineal um den Stift c, bis ich durch die Dioptern den zweiten GegenStand B, erblikke, und ziehe die Linie cb: so erhalte ich den Winkel acb, der so groß ist wie ACB, und den ich mit dem WinkelMesser (§ 217) messen kan.

L. Aber wie lässt die Gleichheit der Winkel ACB und acb sich beweisen?

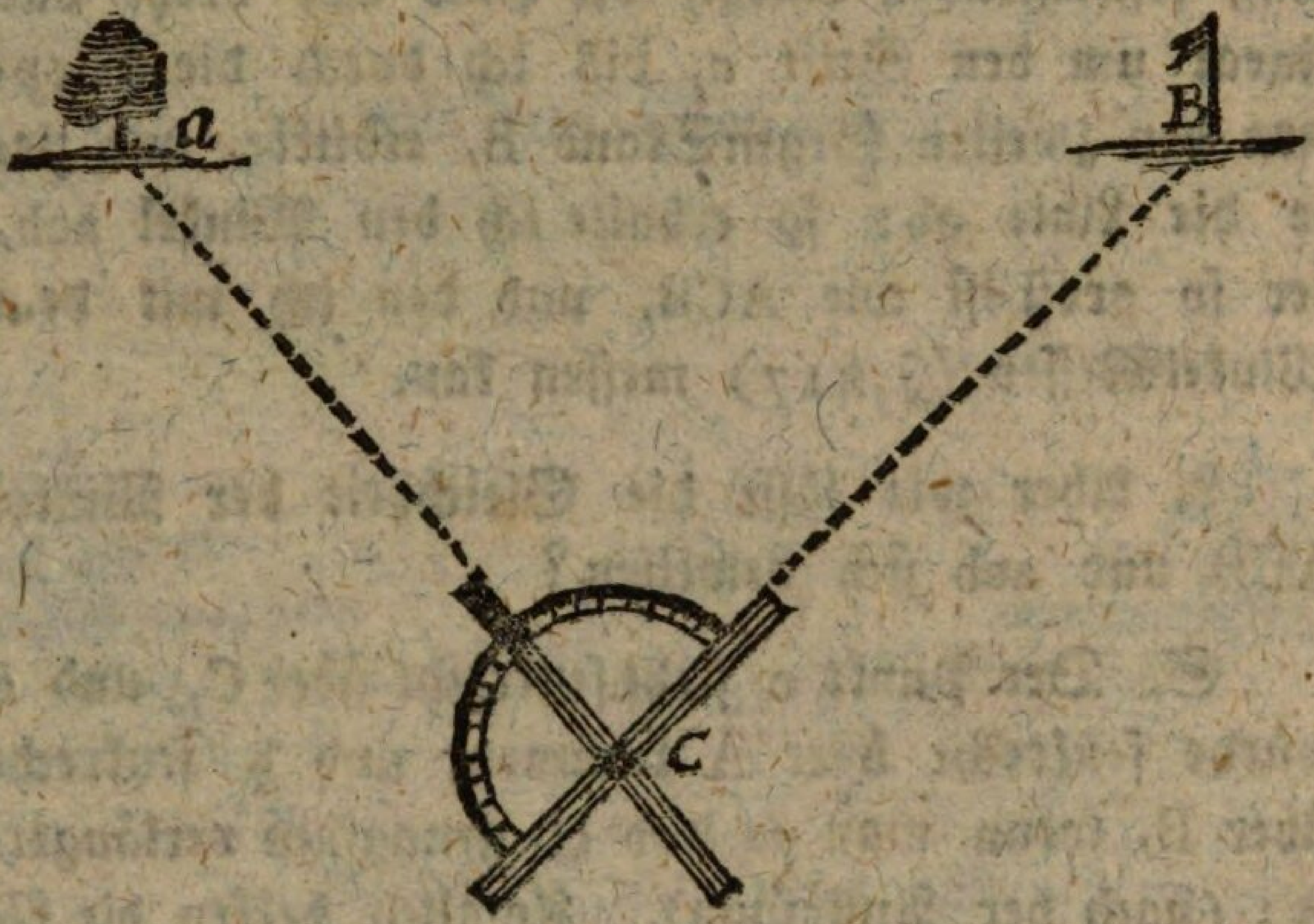
S. Der Punkt c steht senkrecht über C, und a würde senkrecht über A kommen, und b senkrecht über B, wenn man ca und cb genugsam verlängerte: (nach der Auflösung). Folglich dekken die Linie ca und CA, cb und CB, einander (§ 5) Folglich ∠ ACB = ∠ acb (§ 39)

L. Nun eben dieses

mit dem Astrolabio.

S. Ich stelle den MittelPunkt des wagerechten Instruments lotrecht über C; ziele durch die unbeweglichen Dioptern nach dem einen GegenStande A, und durch die unbeweglichen nach dem

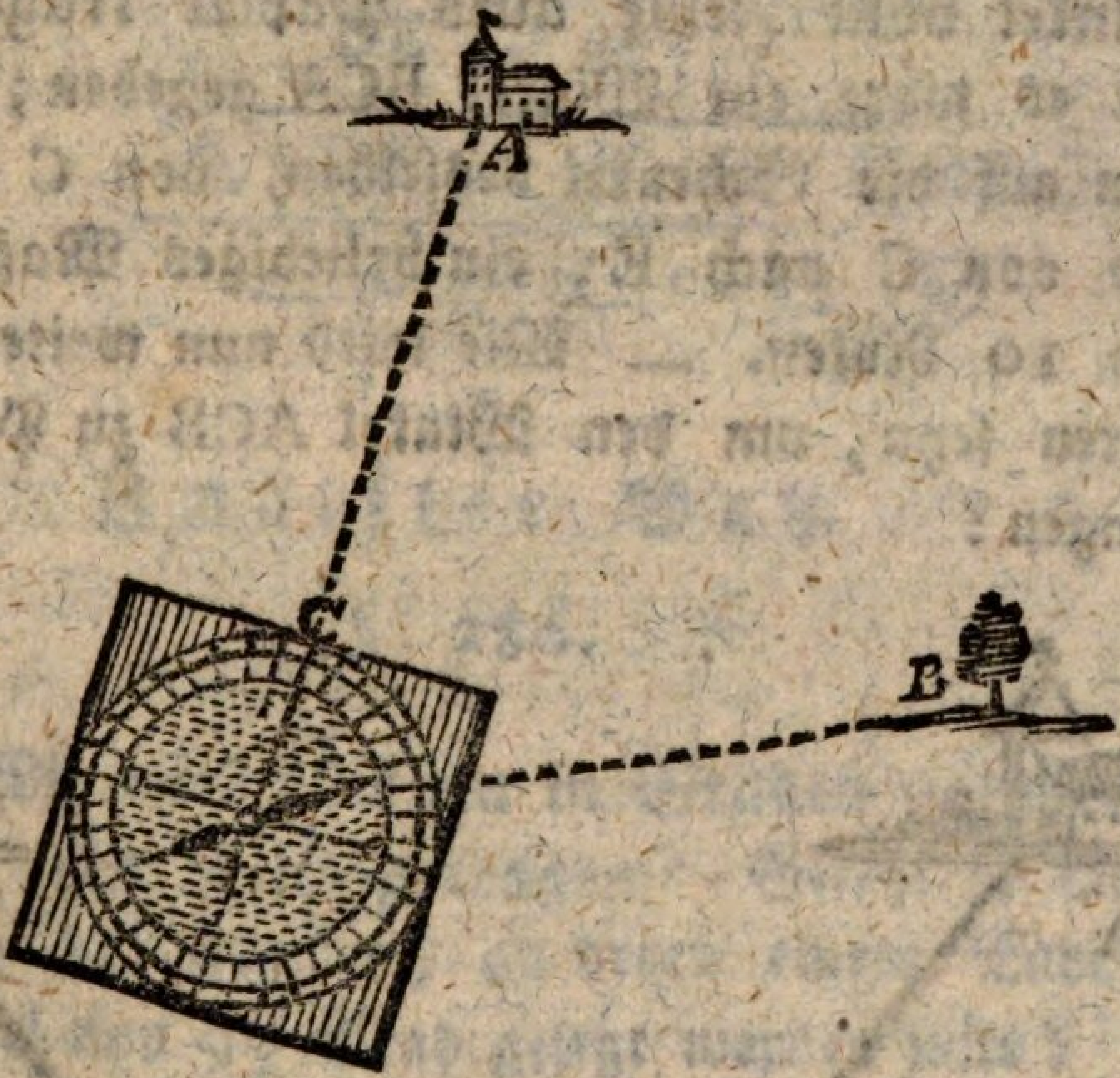
andern B; so treffen beide Lineale mit den Schenkeln des Winkels ACB überein, und ich darf, um seine Grösse anzugeben, nur die Grade und Minuten zählen welche sie zwischen sich fassen. (§ 216, 217).




L. Die Sache ist klar, und nun mit der Boussole?

S. Ich stelle ihren MittelPunkt lotrecht über C; drehe das Kästchen, bis ich durch die Dioptern A erblikke, merke mir die Zahl der Grade (z. B. 32° ) welche die NordSpitze der MagnetNadel weist; richte die Diopteren auf den zweiten Gegen-

genStand B, und zähle wieder die Grade welche eben die Spitze weist: so gibt der Unterschied beider Zahlen die Grösse des Winkels ACB.




L. Angenommen die Nadel weise zum ersten Mal 32 und zum zweiten Mal 78 Grad?

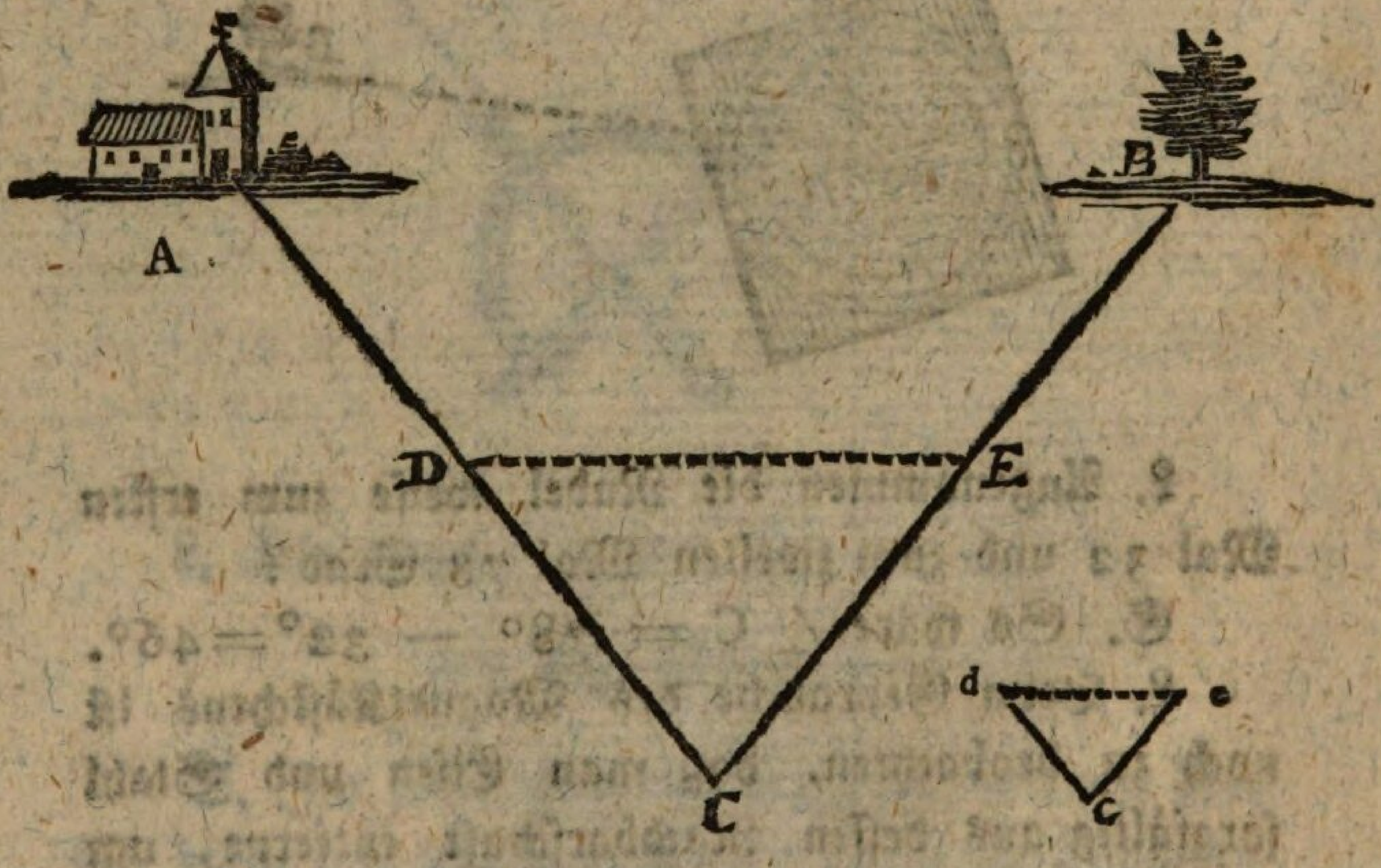
S. So wäre $\angle C = 78° - 32° = 46°$.

L. Beim Gebrauche des MagnetKästchens ist noch zu beobachten, daß man Eisen und Stahl sorgfältig aus dessen Nachbarschaft entferne, um nicht der Nadel eine falsche Richtung zu geben.

## Elfter Saz.

### §. 285.

L. Man kan auch ohne künstliche WerkZeuge Winkel vom Felde aufs Papier tragen. Gesezt es wäre ein Winkel BCA gegeben; so trägt man auf die Schenkel desselben, von C nach D, und von C nach E, ein beliebiges Maß, etwan von 10 Ruten. — Wie wird nun weiter zu verfahren seyn, um den Winkel ACB zu Papiere zu bringen?




S. Ich messe DE (§ 273), zeichne aufs Papier, nach dem verjüngten MaßStabe, ein DreiEkk dce, dessen Seiten denen von DCE gemäß seien (§ 87): so erhalte ich $\angle c = \angle C$.

L. Das

L. Das Verfahren ist richtig: aber wie lässt sich die Gleichheit von C und c beweisen?

$$\left.\begin{array}{l} CD \sqcup cd \\ CE \sqcup ce \\ DE \sqcup de \end{array}\right\} \text{(Verf.)}$$

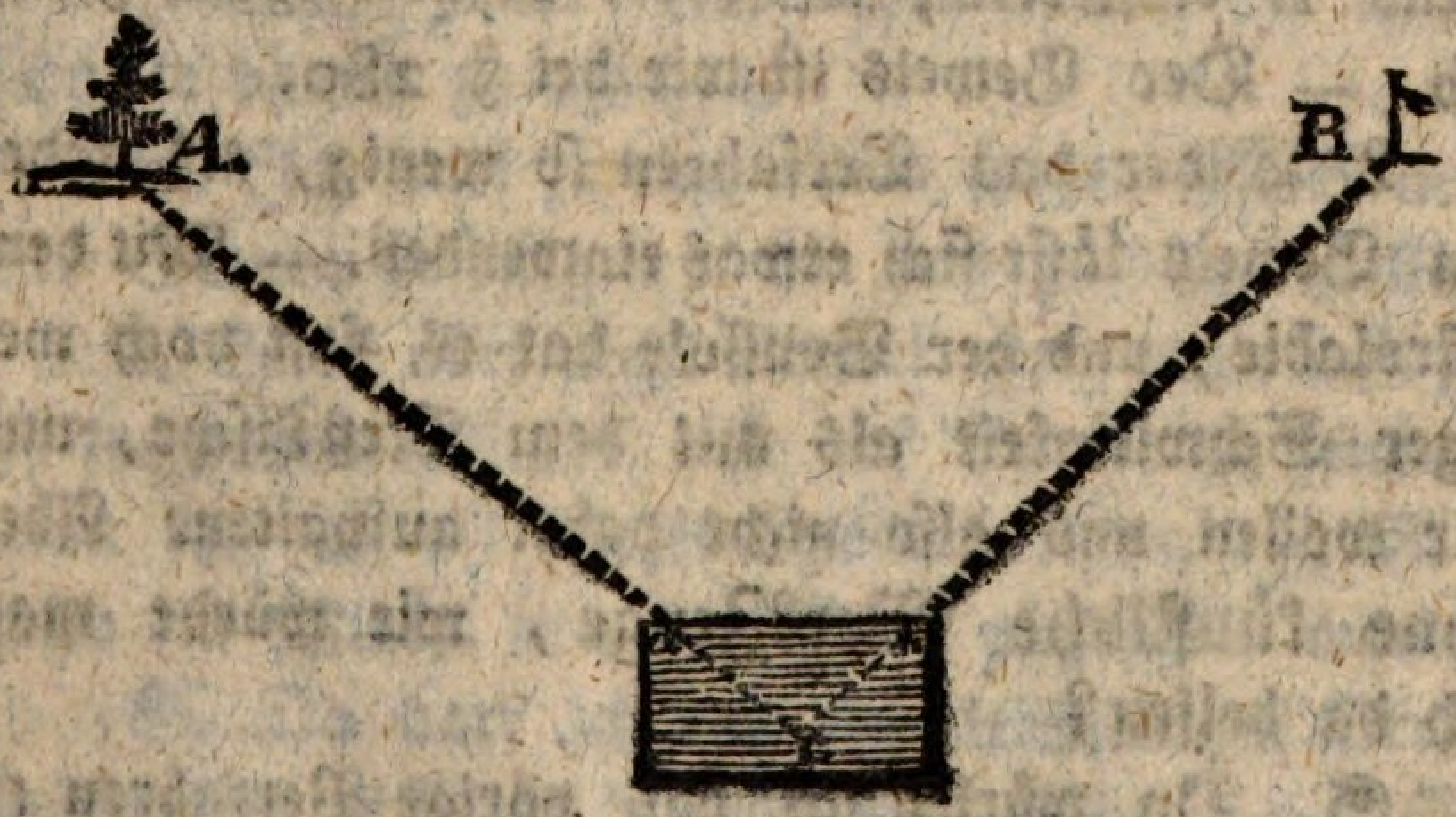
$$\triangle CDE \backsim \triangle cde \quad (\S\ 280)$$

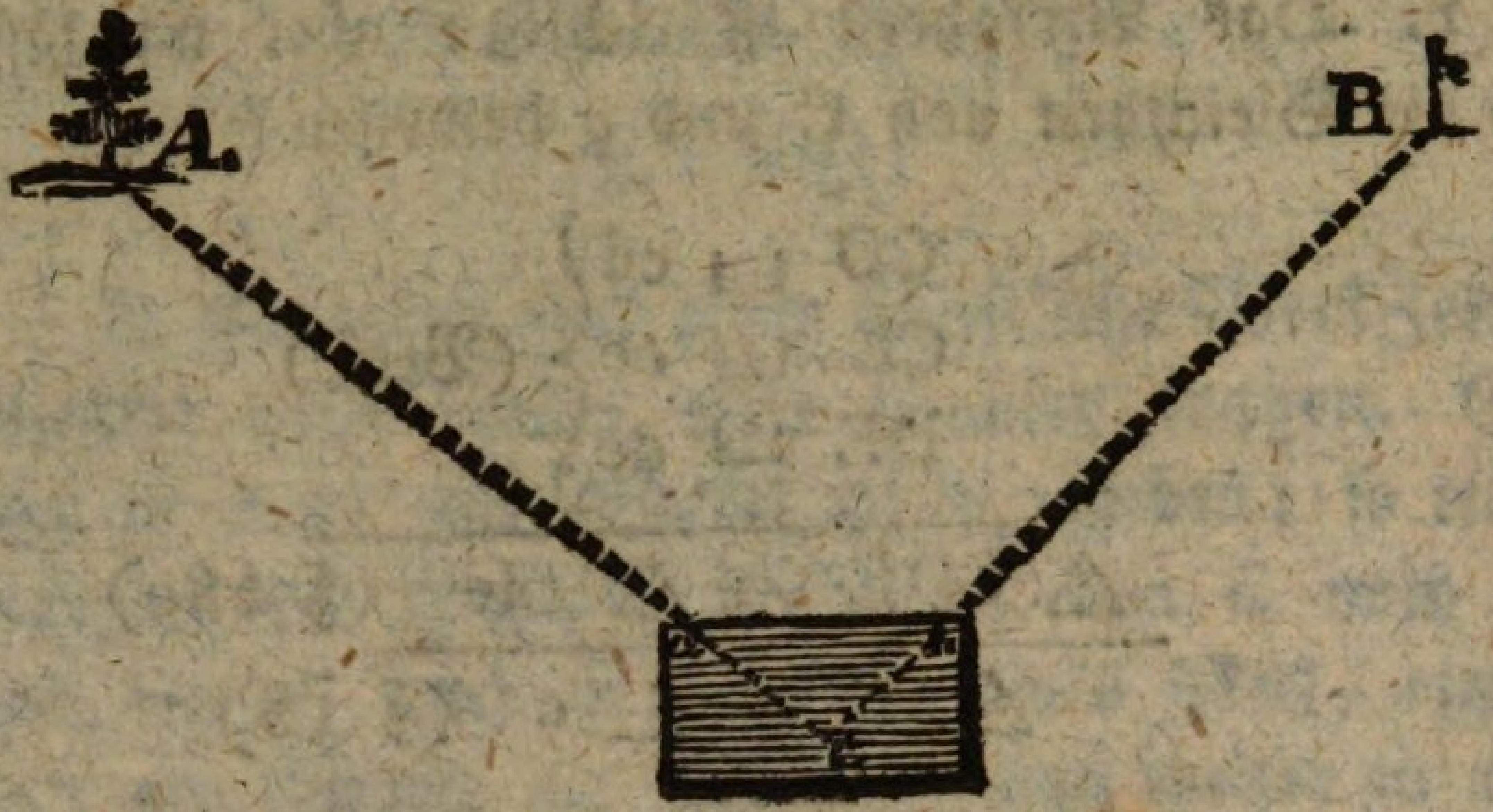
$$\angle C = \angle c \quad (\S\ 18)$$

## Zwölfter Satz.

### § 286.

L. Wie wird aber ein in Graden gegebener Winkel aufs Feld getragen? Gesetzt es wäre eine Linie AC gegeben, an deren einem Ende C ein Winkel von 95 Grad gelegt werden solte?





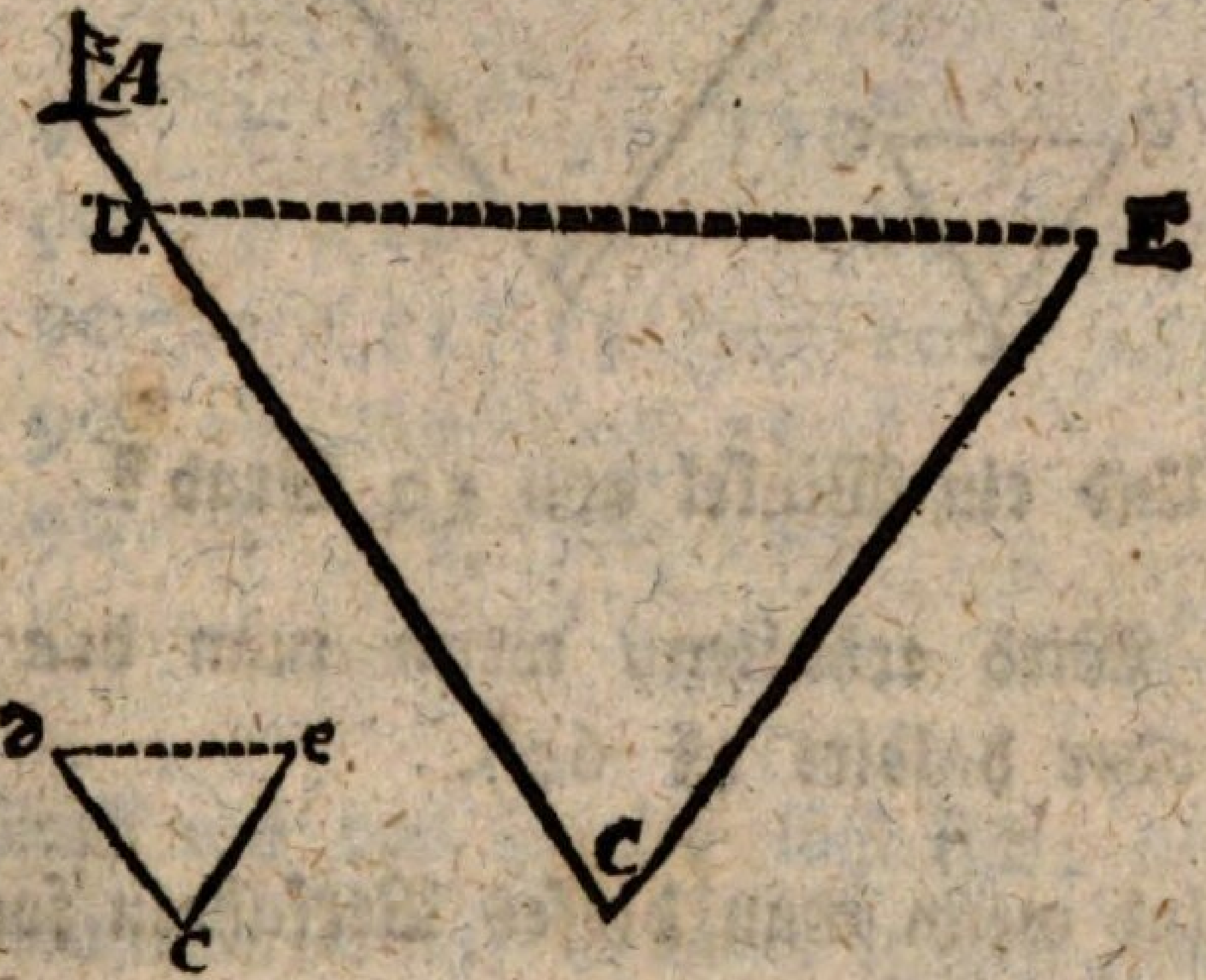

S. Da zeichne ich den verlangten Winkel auf den MeßTisch (§ 217); stelle den Punkt c lotrecht über C; lege das DiopterLineal an ca, und drehe den Tisch so lange, bis ich durch die Diopter den GegenStand A erblikke. Nun lege ich, bei unverrüktem Tisch, das Lineal an cb, ziele durch die Diopter, und lasse in dieser Richtung einen Stab B einstekken; so ist der Winkel ACB gleich acb. — Der Beweis ist wie bei § 280.

L. Wider das Verfahren so wenig, als wider den Beweis lässt sich etwas einwenden. — Mit dem Astrolabio, und der Boussole hat es fast noch weniger Schwirigkeit als mit dem MeßTische, und wir wollen uns also nicht dabei aufhalten. Aber ohne künstliche WerkZeuge, wie würde man sich da helfen?

S. Da würde ich das vorige Verfahren (§ 281) umkehren: zuerst nämlich ein DreiEkk dce

aufs

aufs Papier zeichnen, dessen einer Winkel, c, dem verlangten gleich sei; und nun aufs Feld ein DreiEkk DCE tragen, dessen Seiten nach dem FeldMasse eben so Vieles hielten als die Seiten von dce nach dem verjüngten MaßStabe, so wird ∠C = ∠c (§ 281).

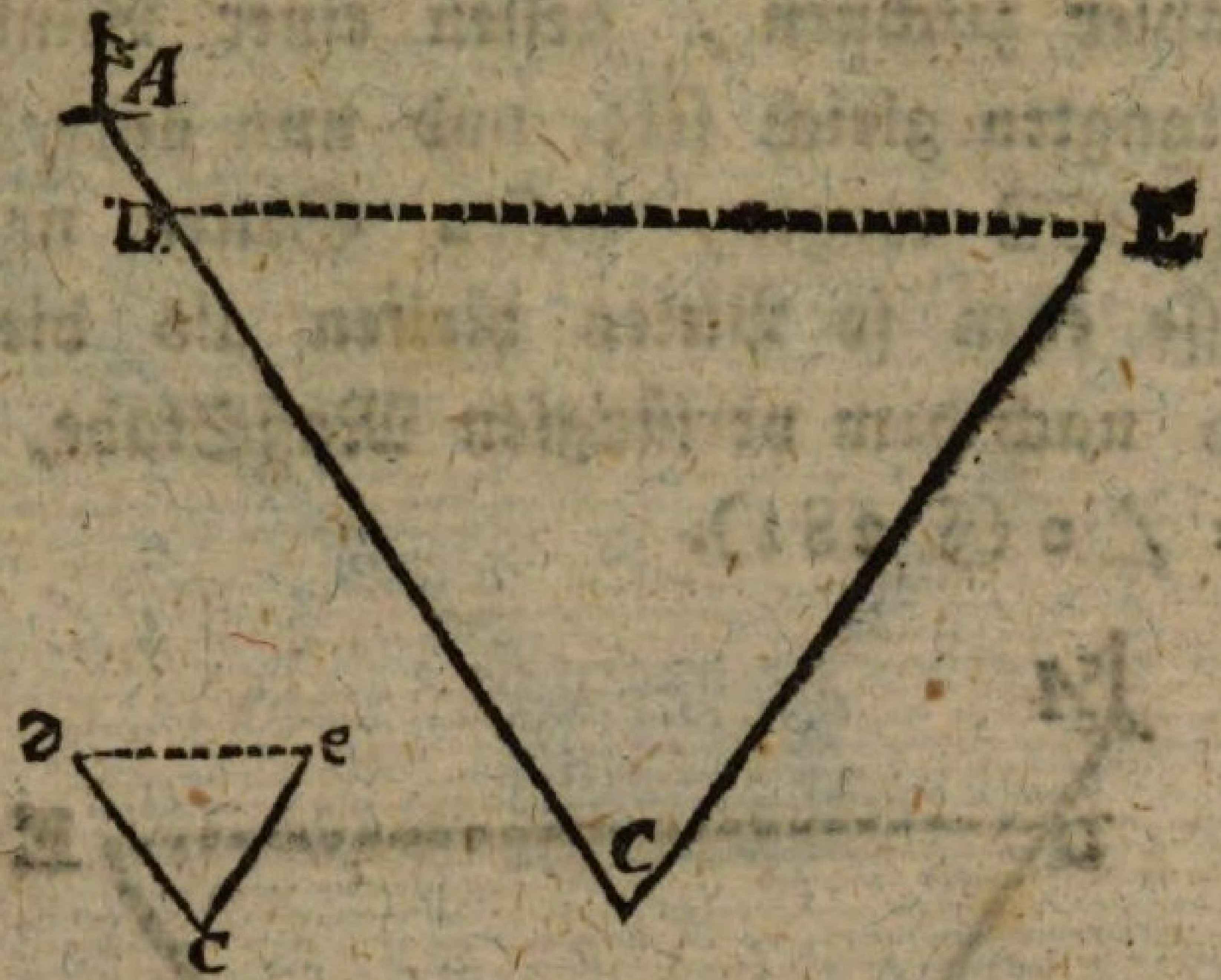



L. Ganz recht. — Nur auf dem Felde kan man keinen Zirkel gebrauchen, um die Durchschnitte damit zu machen.

S. Ich darf ja nur einen spitzen Pflokk an einer Schnur befestigen, um das zu bewerkstelligen.

L. Es ist aber nicht einmal nötig jeden aufs Feld zu tragenden Winkel erst auf Papier zu zeichnen; man kan es oft kürzer bewerkstelligen. Z. B. es solte ein Winkel von 60 Grad abgestekkt werden?

S. Da darf ich nur ein gleichseitiges DreiEkk beschreiben (§ 51), wo jeder Winkel 60 Grad hält (§ 126).




L. Und ein Winkel von 30 Grad?

S. Wird erhalten, wenn man den von 60 halbt, oder halbirt (§ 62).

L. Und wenn man dieses Verfahren fortsetzt, so erhält man ..?

S. Winkel von $15^\circ$, von $7^\circ 30'$, von $3^\circ 45'$ ꝛc.

L. Und durch Addition?

S. $$\begin{aligned} 60^\circ + 60^\circ &= 120^\circ \\ 120^\circ + 30^\circ &= 150^\circ \\ 60^\circ + 15^\circ &= 75^\circ \\ 60^\circ + (7^\circ 30') &= 67^\circ 30' \end{aligned}$$

L. Auch ein rechter Winkel lässt sich beschreiben nach § 69; und dan erhält man durch Halbung ..?

S. $90^\circ : 2 = 45^\circ$
$45^\circ : 2 = 22^\circ\ 30'$
$(22^\circ 30') : 2 = 11^\circ 15'$
u. s. w.

L. Und durch Addition . ?

S. $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$
$90^\circ + (22^\circ\ 30') = 112^\circ\ 30'$
$90^\circ + (11^\circ\ 15') = 101^\circ\ 15'$
Ferner $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
$90 + 75 = 165^\circ$
u. s. w.

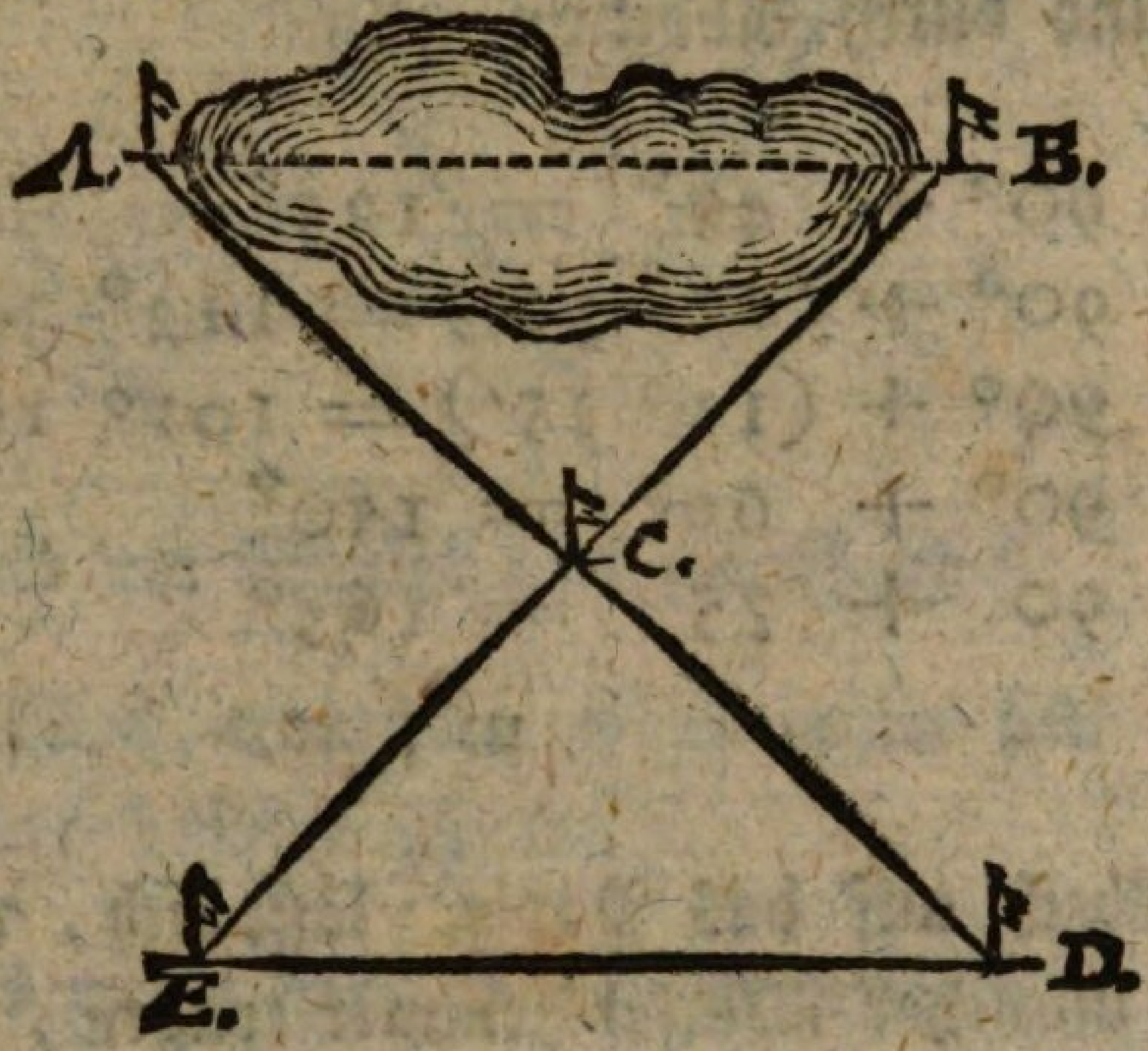
L. Auch auf das Papier läſſt sich, nach dieser Art, mancher Winkel genauer tragen, als vermittelst des WinkelMessers (§ 217), auf dessen Richtigkeit man sich nicht immer verlassen kan, und der auch überdis nur Grade, nicht aber Minuten, angibt. Mehr dergleichen Hülfsmittel lehrt die Trigonometrie.

## Dreizehnter Saz.

### § 287

L. Eine grade Linie die man ganz begehen kan, wissen wir schon zu messen (§ 273): wie läſſt

sich aber die Breite eines Sees, eines Sumpfs ꝛc., oder, mit einem Worte, die Länge einer geraden Linie AB, von der nur die Endpunkte A und B zugänglich sind, angeben? und zwar




1) mit Stäben.

Man wählt ausserhalb AB einen StandOrt C, von welchem man nach A und B geradezu gehen kan; misst CA und CB (§ 273); verlängert beide rükkwärts nach D und E (§ 271), so daß CD = CA, und CE = CB werde. — Wie lang wird nun ED seyn?

S. So lang als AB.

L. Und der Beweis?

S. CD = CA } (Verfert.)
CE = CB }

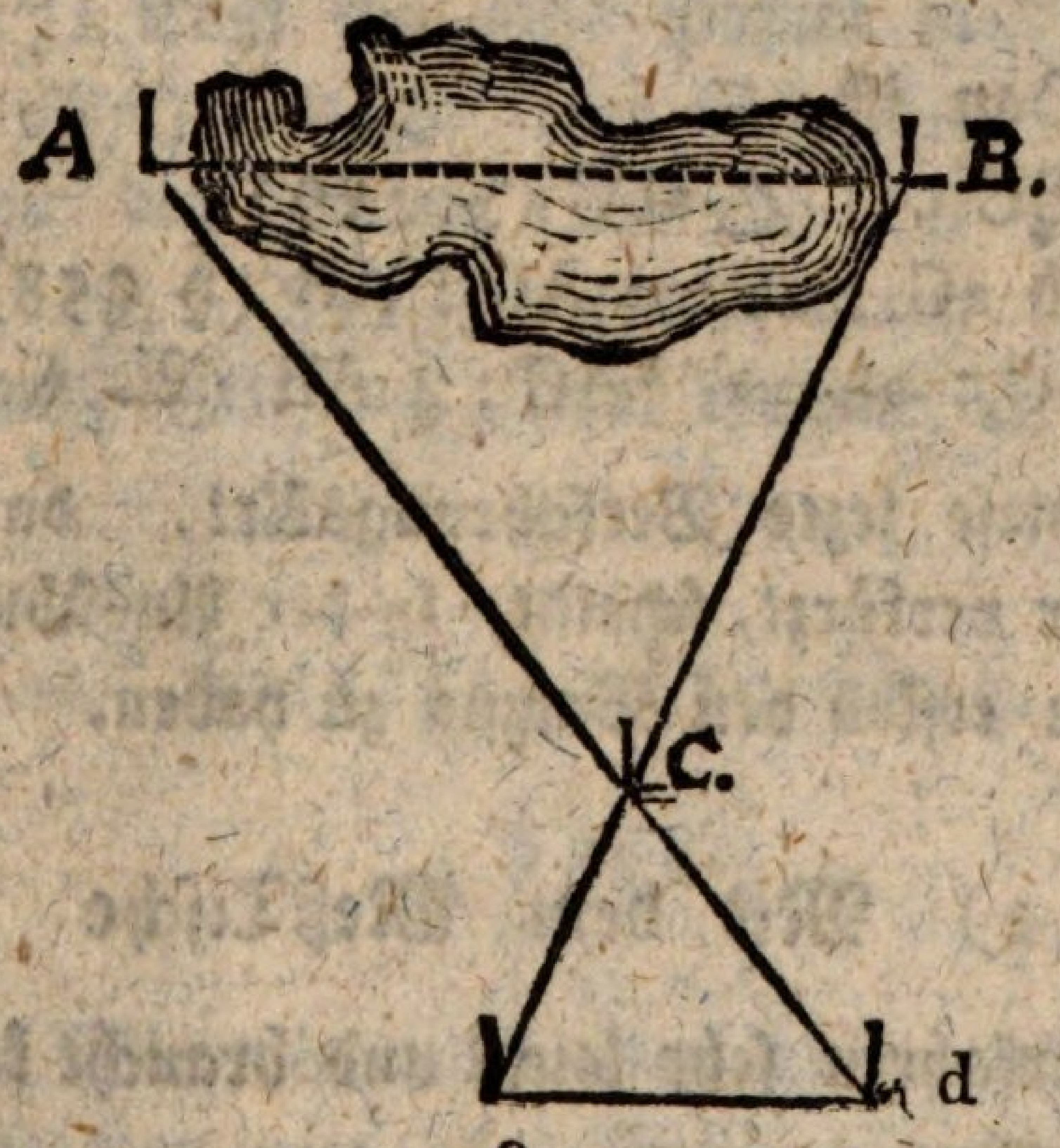
$\angle$DCE = $\angle$ACB (§ 76)

$\triangle$DCE $\cong$ $\triangle$ACB (§ 54)

DE = AB (§ 18)

L. Wie aber wenn sich Hindernisse finden die Linien CD und CE genugsam zu verlängern?

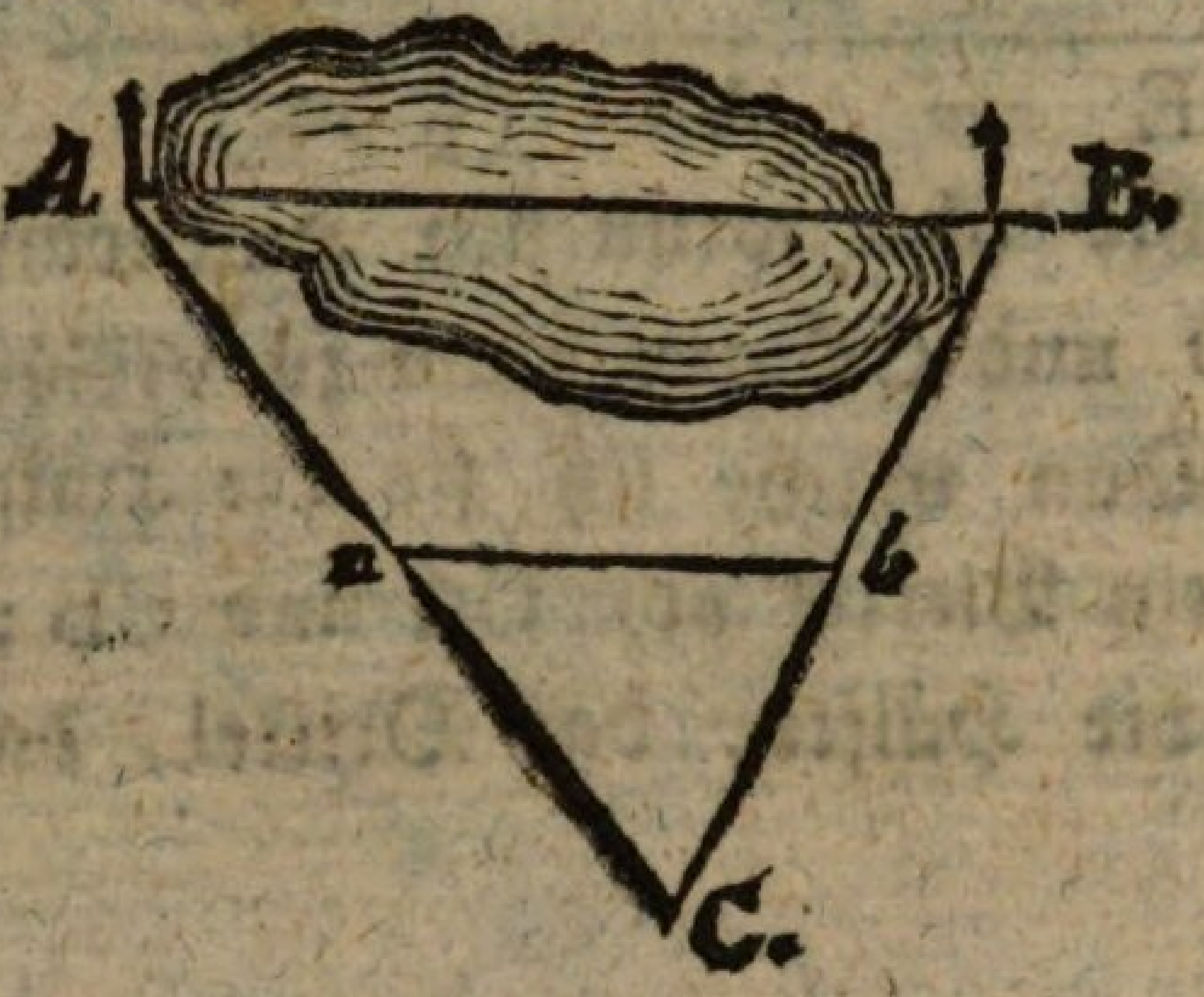
S. Dan mache ich sie die Hälfte, oder ein Drittel, ein Viertel von CA und CB; so wird de auch nur die Hälfte, das Drittel, das Viertel ꝛc. von AB.




L. Recht! Aber wie lässt es sich beweisen?

S. Die DreiEkke ACB und dCe sind ähnlich (§ 254), und haben folglich lauter proportionirte Seiten (§ 258).

L. Wie aber, wenn man die Linien AC und BC halbte in a und b (§ 65): wie lang würde dan ab seyn?




S. Dan ist

△ABC ∽ △abC (§ 259)

folglich aC : ab = AC : AB (§ 258)

oder aC : ab = $\frac{1}{2}$AC : $\frac{1}{2}$AB (A. § 235).

L. Diese lezte VerfahrungsArt, da sie die Arbeit sehr verkürzt, scheint, in der Ausübung, vor den beiden ersten den Vorzug zu haben.

## 2) Mit dem MeßTische

ist das Verfahren sehr leicht und braucht kaum gelehrt zu werden.

E. Ich trage den Winkel ACB auf den Tisch (§ 282); messe die Linien CA und CB (§ 273) und trage die gefundene Länge derselben, nach dem

dem verjüngten MaßStabe, auf die Schenkel des Winkels, von C nach a und nach b; so ist

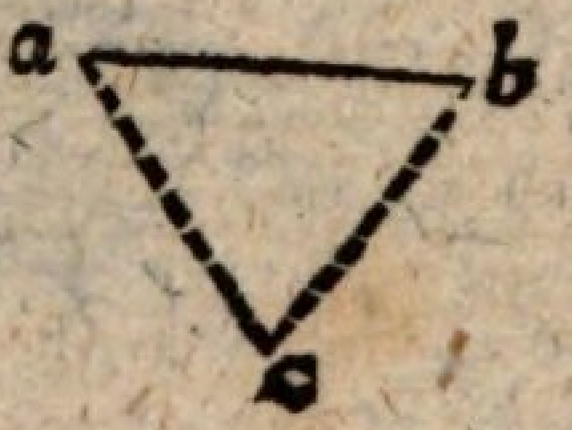
$$\frac{\triangle\ abc \backsim \triangle\ ABC\ (\S\ 277,\ 259)}{ab \sqcup AB\ (\S\ 288)}$$

L. Recht! Und eben so wenige Schwirigkeit hat die Sache

3) mit dem WinkelMesser, und

4) mit dem MagnetKästchen.

S. Man misst den Winkel C, (§ 287) trägt ihn aufs Papier in c (§ 281), macht seine Schenkel ca, cb den Linien CA und CB gemäß (§ 278), so erhält man, ab gemäß AB. — Der Beweis ist wie vorhin.




## Vierzehnter Satz.

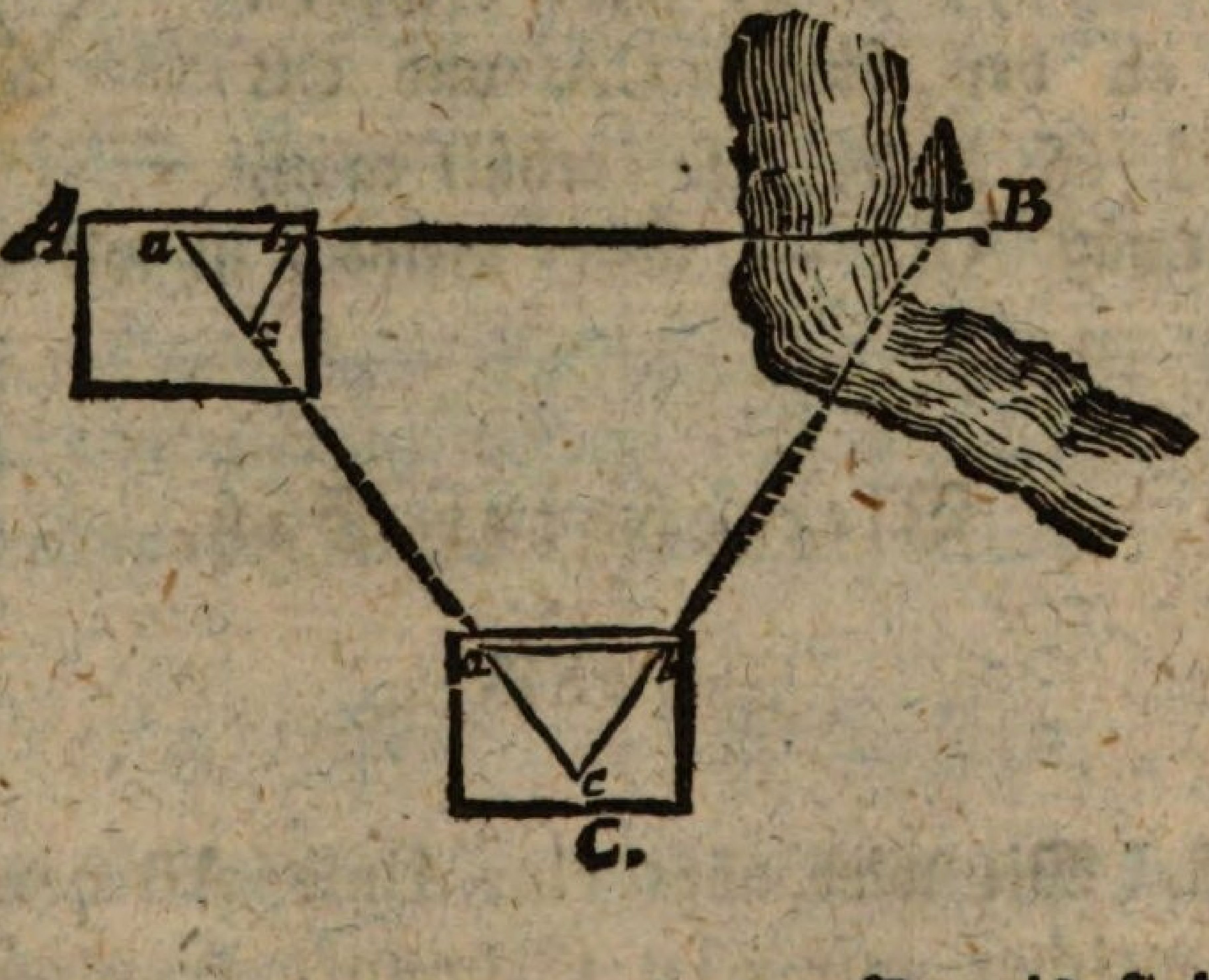
### § 288.

L. Wie wird aber eine Linie AB gemessen, von welcher nur ein Erdpunkt A zugänglich ist, wie, z. B., die Breite eines Flusses? Da es mit dem MeßTisch am leichtesten geht, so wollen wir damit anfangen.

1) Mit

1) Mit dem MeßTische.

E. Ich wähle einen Standpunkt C, von wo ich A und B sehen kan; mache den Winkel c = C (§ 282), und die Linie ca gemäß CA (§ 278); stelle den MeßTisch in A, so daß a senkrecht über A, und ac in die Richtung von AC komme; mache den Winkel a = A: so werden die genugsam verlängerten Schenkel der Winkel A und C sich schneiden in b, und ich erhalte ein DreiEkk abc ∽ ABC (§ 255), und ab gemäß AB (§ 279).

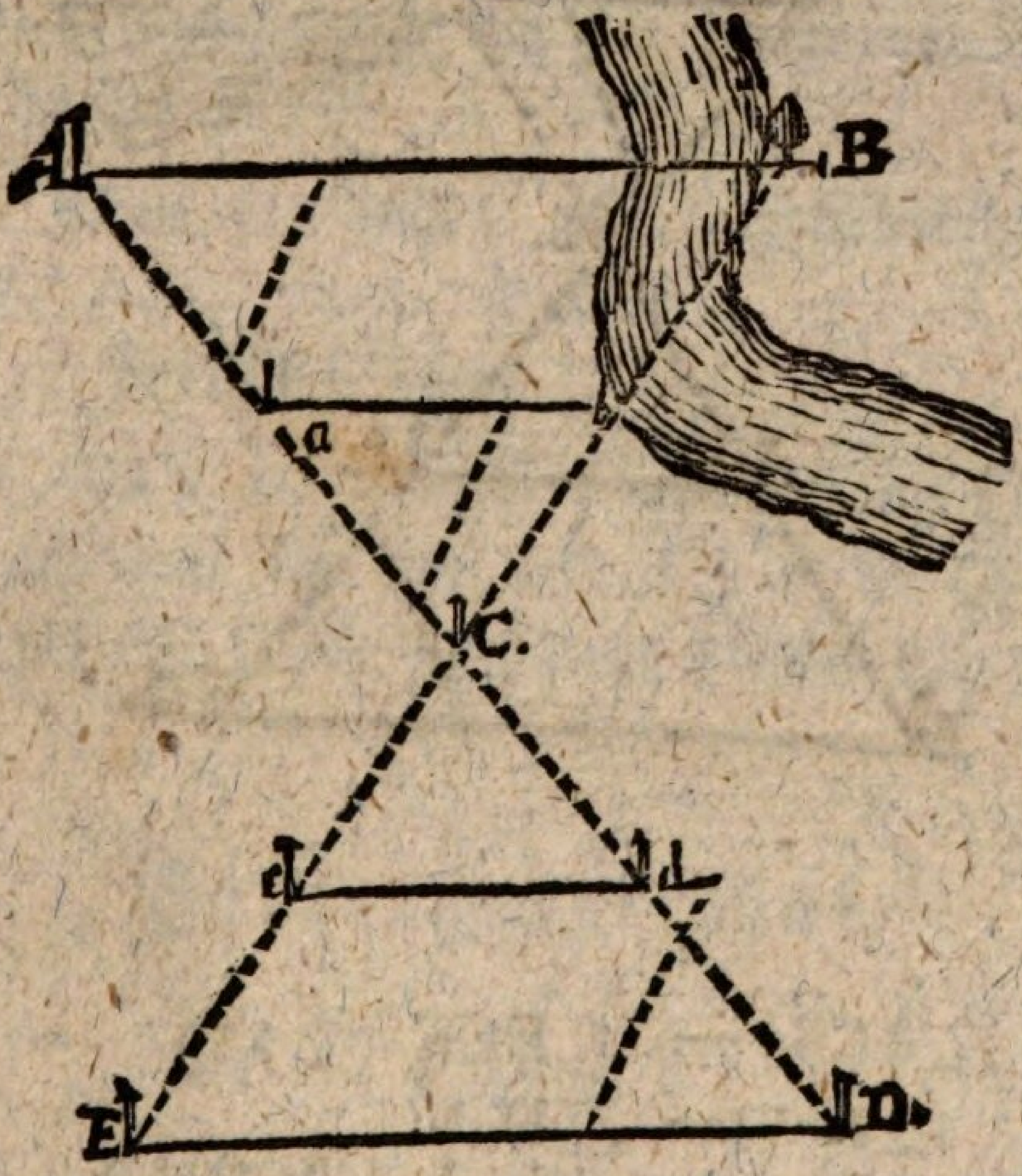



L. Das Verfahren und der Beweis sind richtig, und sind beide noch überdies aufs Astrolabium und MagnetKästchen zugleich anwendbar, man darf nur, was hier auf den Tisch gezeichnet

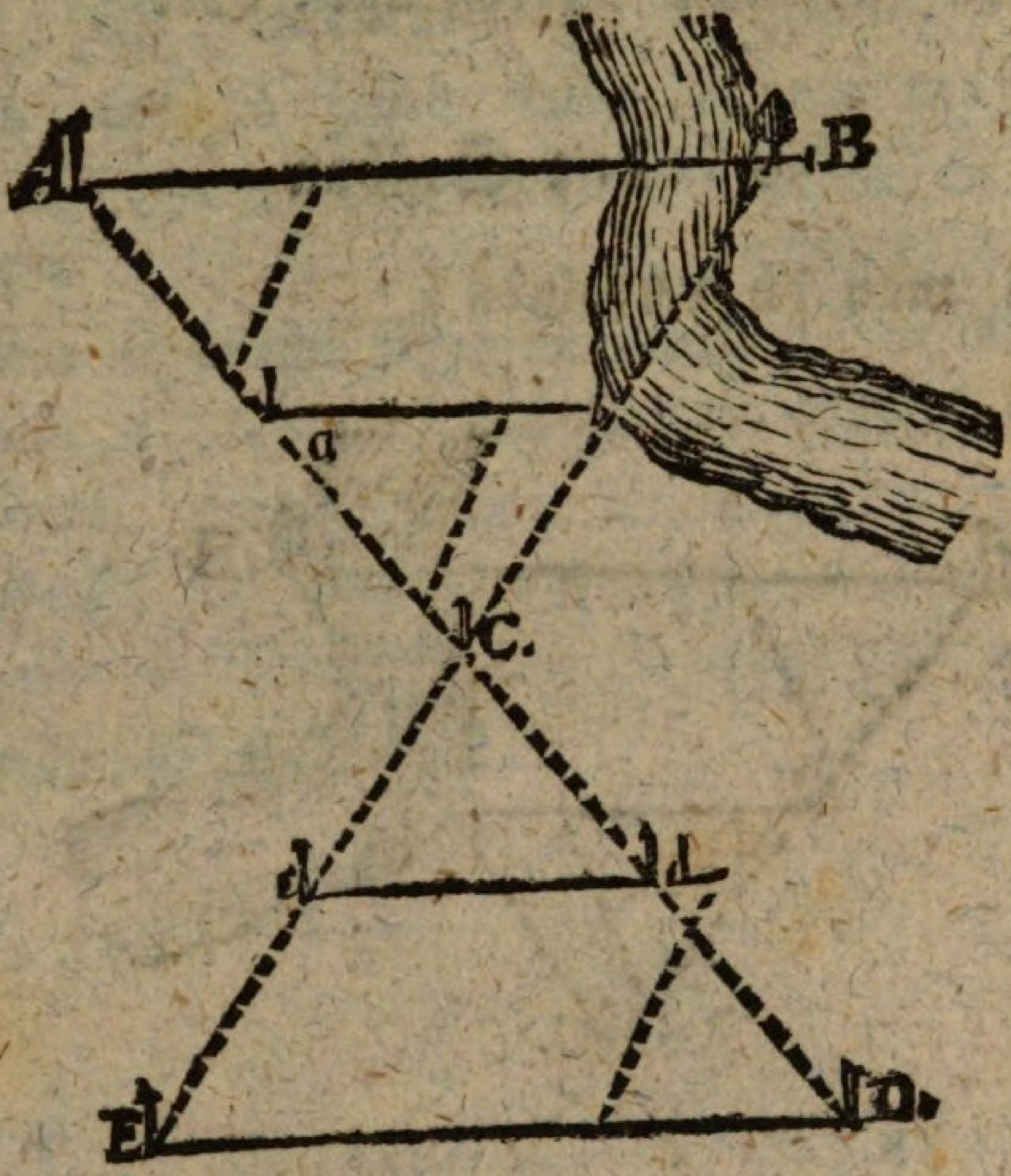
net wurde, auf ein besondres Papier tragen. — Aber ohne künstliche Werkzeuge, oder

2) mit Stäben

wie wird man da verfahren?




S. Ich verlängere AC über C hinaus, und mache CD = CA; verlängere BC unbestimmt; mache ∠D = ∠A (§ 89), und verlängere den einen Schenkel, bis er mit der verlängerten Linie BC zusammentrift in E: so erhalte ich DE = AB: denn




$$\angle ACB = \angle DCE \ (\S\ 76)$$
$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ CA = CD\end{array}\right\} \text{(Verfert.)}$$
$$\triangle ACB \cong DCB \ (\S\ 92)$$
$$AB = DE \ (\S\ 18)$$

L. Ganz richtig! Uebrigens findet auch hier Anwendung, was bei voriger Messung (§ 285) erinnert ist. Und was war das?

L.

S. Daß man, wenn sich Hindernisse finden, nur einen Teil der Linien AC, BC nach d und e tragen dürfe, um Cd : de = CA : AB zu erhalten.

L. Richtig! Aber der andre Vorteil, durch Teilung der Linien AC und BC lässt sich hier wol nicht anbringen, da die Länge von BC unbekant ist?

S. Man kan dafür, an einer beliebigen Stelle auf AB, einen Winkel a = A machen (§ 89); so erhält man

Ca : ab = CA : AB (§ 255)

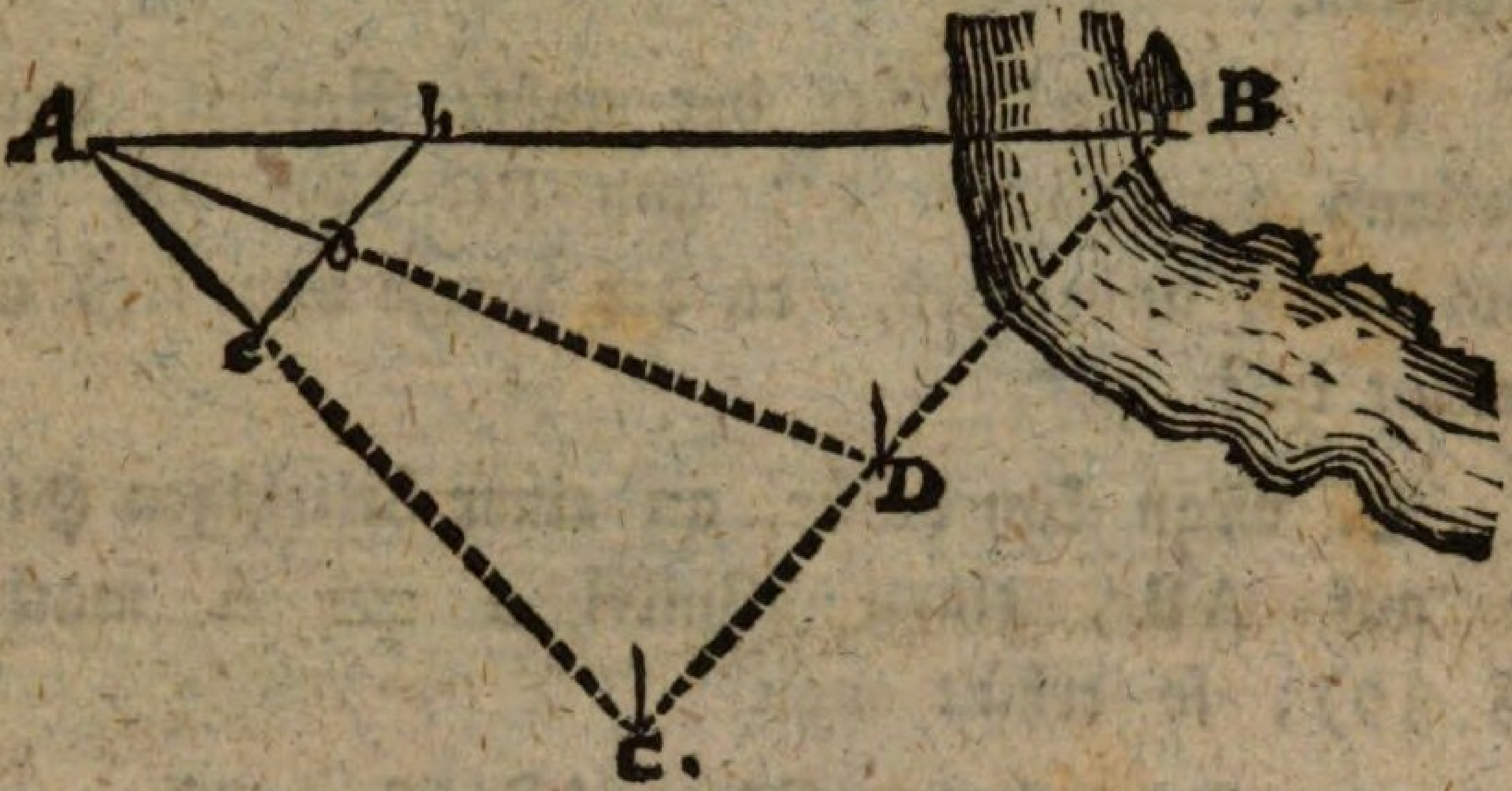
Wenn ich nun Ca, ab, und CA messe (§ 273); so kan ich AB durch Rechnung finden. (A. § 243).

## Funfzehnter Satz.

### § 288.

L. Eben diese Weite AB lässt sich auch aus einem einzigen StandPunkte A finden, ohne daß man nötig habe das MeßZeug nach einem andern C zu tragen. Hier ist die Zeichnung:

Vielleicht ist die hinlänglich, das Verfahren daraus zu ersehn. Denke der Sache nach, ich gebe dir Zeit dazu.




S. Ich wähle ausserhalb AB einen Punkt C, und mit C und B in gerader Linie, einen zweiten D; messe die Winkel BAC und CAD, desgleichen die Linien AC und AD; mache auf dem Papier

$$\left.\begin{array}{l}\angle bAc = \angle BAC \\ \angle cAd = \angle CAD\end{array}\right\}(\S\ 283)$$

$$\left.\begin{array}{l}Ac \sqcup AC \\ Ad \sqcup AD\end{array}\right\}(\S\ 278)$$

Zulezt ziehe ich durch c und d eine gerade Linie cdb: so erhalte ich ab $\sqcup$ AB.

L. Das ist alles recht. Aber nun den Beweis! Was sezt die Gemäsheit der Linien Ab und AB zunächst voraus?

S.

S. Die Aehnlichkeit der DreiEkke Acb und ACB. (§ 258)

L. Und die Aehnlichkeit dieser DreiEkke sezt wieder voraus . . ?

S. Die Gleichheit der Winkel Acd und ACD?

L. Und die Gleichheit dieser Winkel?

S. Sezt die Aehnlichkeit der DreiEkke Acd und ACD voraus.

L. Nun wissen wir also von wo wir, bei unserm Beweise ausgehen müssen.

S. 1) $\left.\begin{array}{l} Ac \sqcup AC \\ Ad \sqcup AD \end{array}\right\}$ (Verfert.)

$Ac : AC = Ad : AD$ (§ 231)

2) Ferner $\angle\, cAd = \angle\, CAD$ (Verfert.)

$\triangle\, cAd \backsim \triangle\, CAD$ (§. 259)

$\angle\, Acd = \angle\, ACD$ (§ 259)

3) Aber auch $\angle\, bAc = \angle\, BAC$ (Verfert.)

$\triangle\, bAc \backsim \triangle\, BAC$ (§ 258)

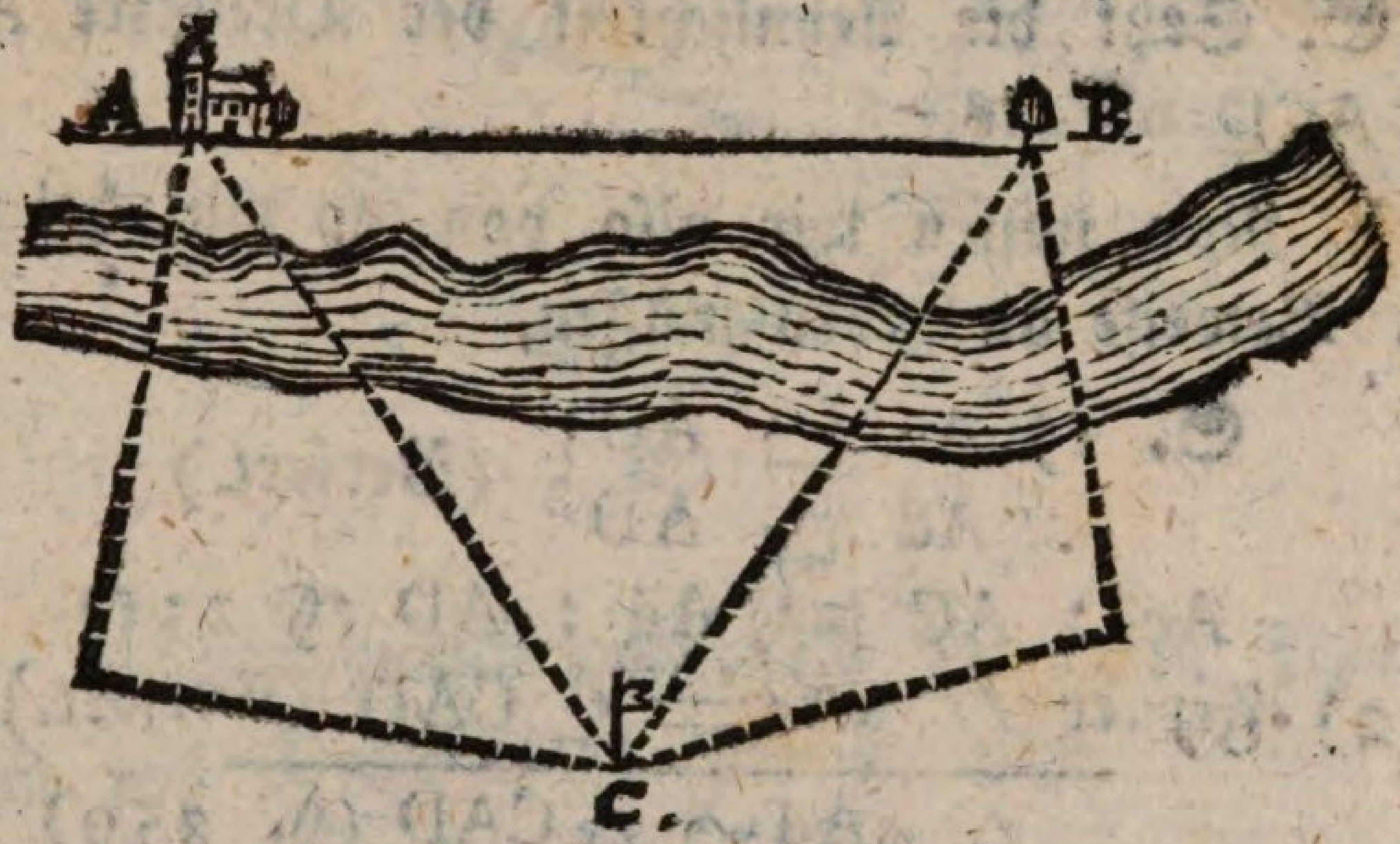
$Ab \sqcup AB$ (§ 279).

L. Bei di[illegible]rfahren hat man eine Linie mehr zu me[illegible] dem vorigen, aber dafür einen Winkel we[illegible] — Es ist übrigens nüzlich, eine Aufgabe a[illegible] mehr als eine Art auflösen zu wissen, um sich nach den Umständen, der einen oder der andern bedienen zu können.

## Sechzehnter Satz.

§ 289.

L. Es ist nun noch ein dritter Fall übrig: Eine gerade Linie AB zu messen, deren beide EndPunkte, A und B, unzugänglich sind.



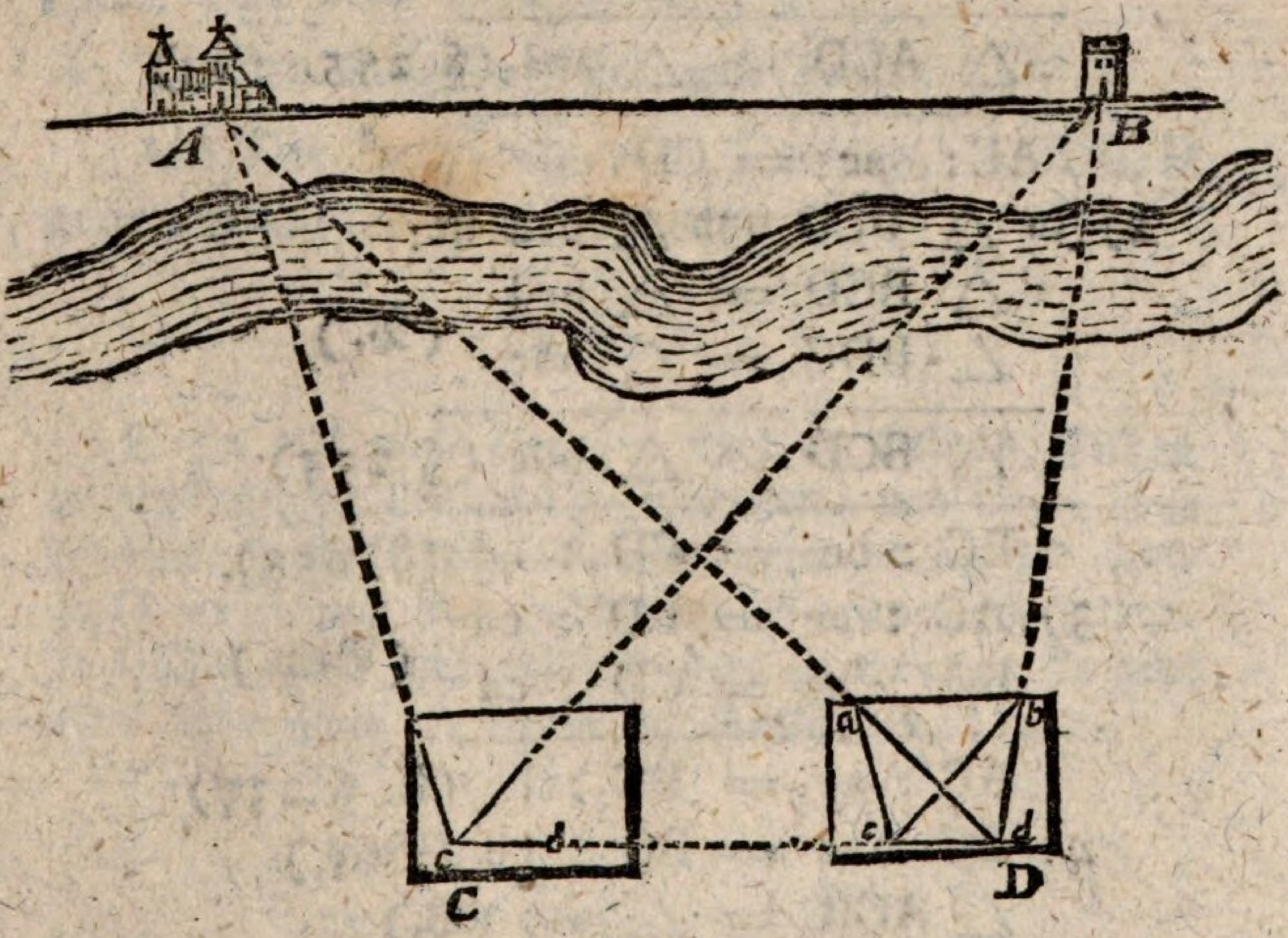

(Fält der Lehrling nicht von selbst auf die Auflösung, so kan ihm die Zeichnung gezeigt werden).

S. Ich wähle ausser der Linie einen Punkt C: so habe ich an AC und BC Linien deren einer EndPunkt C zugänglich ist, und deren Länge sich, nach der vorigen Aufgabe (§ 286, 287) bestimmen lässt. Weis ich nun das Maß von AC und BC; so kan ich das von AB (nach § 285) finden.

L. Ganz richtig! Aber das Verfahren ist weitläufig, und überdies nicht immer ausführbar. Die folgende Zeichnung zeigt uns ein kürzeres.

Ich

S. Ich wähle eine StandLinie CD der AB ungefähr gegenüber, wenn es seyn kan; messe die Winkel ACB und ACD (§ 282), und trage sie aufs Papier in c. Hierauf messe ich die Linie CD und trage sie, nach dem verjüngten MaßStabe, von c in d. Dan messe ich die Winkel BDC und ADC, und trage sie gleichfalls aufs Papier in d. Endlich verbinde ich die Punkte a und b, wo die zulezt gezogenen Linien, die von c ausgehenden schneiden, durch eine gerade Linie ab, welche der AB gemäß ist.




L. Das Verfahren ist richtig. Aber nun den Beweis! — Worauf kömt es dabei zunächst an?

S. Auf die Aehnlichkeit der DreiEkke ACB und acb (§ 279).

L. Und diese Aehnlichkeit, woraus wird die sich erweisen lassen?

S. Aus vier proportionirten Seiten, AC, ac, BC, bc, und den dazwischen liegenden Winkeln ACB und acb (§ 262).

L. Gut! Also zuerst?

S. 1) In △ ACD und △ acd ist:

∠ ACD = ∠ acd } (Verf.)
∠ ADC = ∠ adc }

---

△ ACD ∽ △ acd (§ 255, 123)

---

AC: ac = CD: adc (§

2) In △ BCD und △ bcd ist:

△ BCD = △ bcd
∠ BDC = ∠ bdc (V.)

---

△ BCD ∽ △ bdc (§ 255)

---

BC : bc = CD : cd (§ 258).

3) AC : ac = CD : cd
BC : bc = CD : cd (Bew.)

---

AC : ac = BC : bc (A. § 237)

4) AC : ac = BC : bc (Bew.)
∠ ACB = ∠ acb (V.)

---

△ ACB ∽ △ acb (§ 254)

---

AB ⊔ ab (§ 279).

L.

L. Es ist noch zu bemerken, daß die Auflösung mehr leistet, als die Aufgabe foderte. Was wolten wir eigentlich wissen?

S. Das Maß der Linie AB.

L. Und wir haben nicht allein dies, sondern auch noch ..?

S. das von CA, CB, DA, und DB (§ 279).

L. Die Oerter a, b, c, d haben also auf dem Papier eine Lage ..?

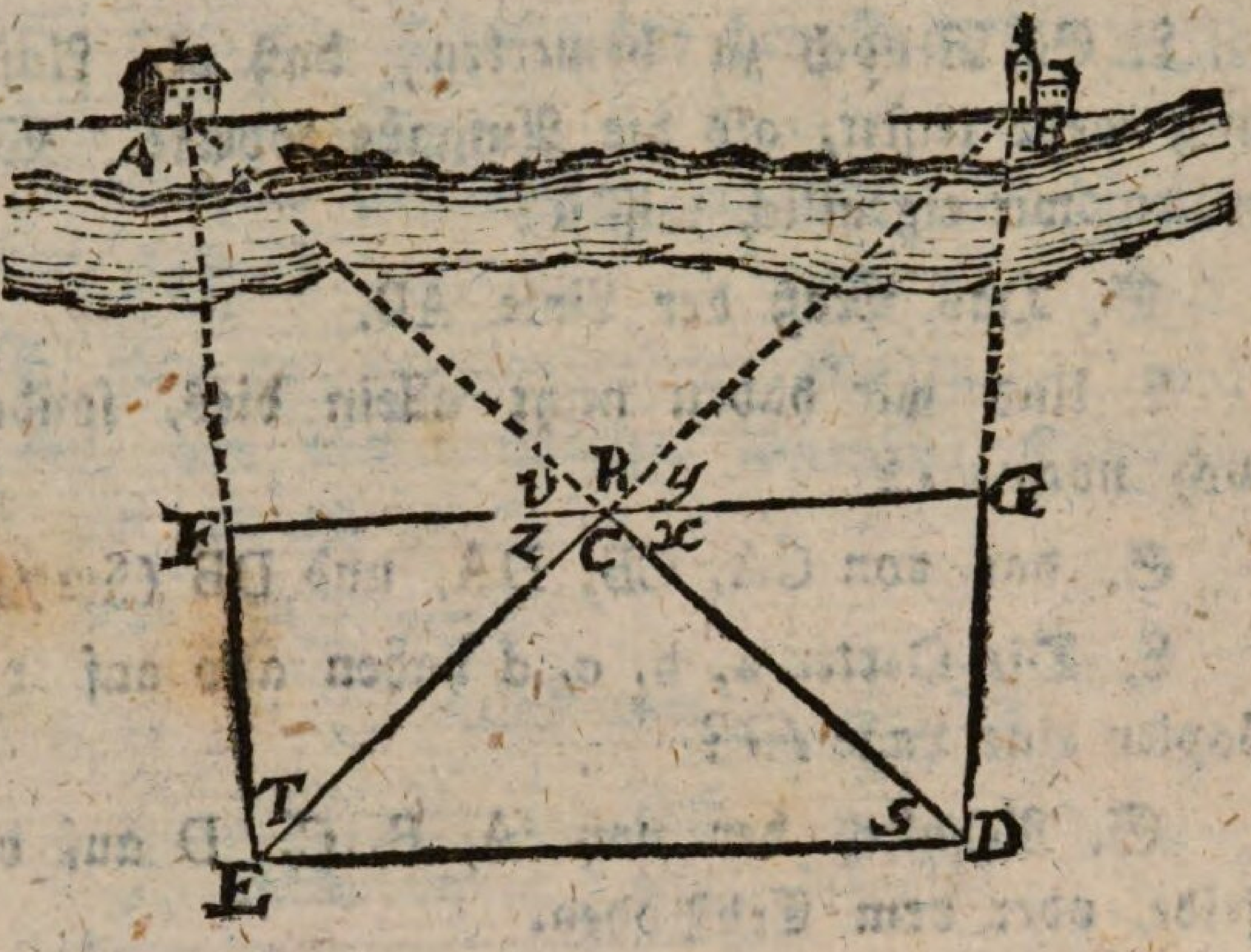
S. Aehnlich der von A, B, C, D auf dem Felde, oder dem ErdBoden.

L. Die Aufgabe könte auch heissen ..?

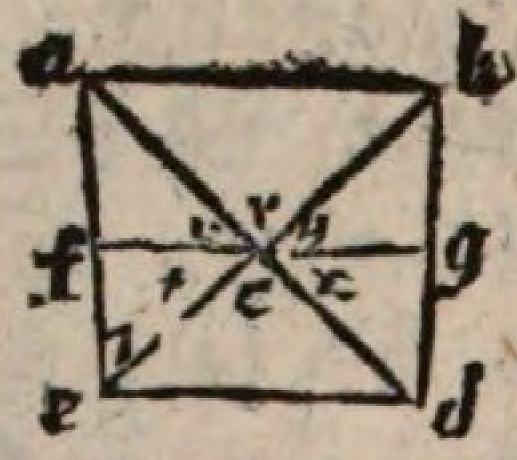
S. Die Lage von vier Oertern, A, B, C, D gegen einander zu bestimmen.

§ 290.

L. Es gibt noch eine Art eine an beiden Enden unzugängliche Linie AB zu messen, und zwar ohne künstliche MeßWerkzeuge, welche kürzer ist als die vorige (§ 287), und die wir daher auch mitnehmen wollen. Das Verfahren gibt nebenstehende Zeichnung. Es geht alles dabei nach der Folge der Buchstaben.




S. Ich wähle einen Punkt C, von wo ich A und B sehen kan; verlängere AC und BC willkührlich bis D und E (§ 271). Hiernächst stekke ich, mit A und E in gerader Richtung, einen Stab in F, und verlängere FC bis sie BD schneidet in G. Hierauf messe ich die Linien CD, CE, CF, CG, und DE (§ 272) und zeichne aufs Papier die DreiEkke cde, cef, cdg, in eben der Ordnung wie CDE, CEF, CDG auf dem Felde, und nach eben dem Masse, aber nach verjüngtem MaßStabe. Endlich




verlängere ich dc und ef, ec und dg, bis sie in a b zusammen stossen; so erhalte ich ab gemäß AB.

L. Das Verfahren ist richtig, aber der Beweis fehlt noch. Worauf kömt es dabei zunächst an?

S. Auf die Aehnlichkeit der DreiEkke ACB und acb.

L. Diese aber sezt voraus ::?

S. Die Aehnlichkeit der DreiEkke FCA und fca, GCB und gcb; oder die von ACE und ace, BCD und bcd.

L. Recht! Wir wollen alle einander gemässe Linien zeichnen, und alle gleiche Winkel mit einerlei Buchstaben bemerken, und dan den Beweis versuchen.

S. (1)
$$\left.\begin{array}{l} \triangle\ CDE \backsim \triangle\ cde \\ \triangle\ CEF \backsim \triangle\ cef \\ \triangle\ CDG \backsim \triangle\ cdg \end{array}\right\} \text{(B. u. § 280)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \angle\ C & = & \angle\ c \\ T & = & t \\ Z & = & z \\ X & = & x \\ S & = & s \end{array}\right\} \text{(§ 18)}$$

(2)

$$\left.\begin{array}{rcl} V & = & X \\ v & = & x \\ Y & = & Z \\ y & = & z \\ C & = & R \\ c & = & r \end{array}\right\} \text{(§ 76)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} V & = & v \\ Y & = & y \\ R & = & r \end{array}\right\} \text{(A. § 29)}$$

(3)

$V + Z = v + z$ (𝔄. 32)

$T = t$ (1)

$\triangle ACE \backsim \triangle ace$ (§ 123, 258)

$AC \sqcup ac$ (§ 280)

(4)

$Y + X = y + x$ (𝔄. § 32)

$S = s$ (1)

$\triangle BCD \backsim \triangle bcd$ (§ 123, 258)

$BC \sqcup bc$ (§ 280)

(5)

$AC \sqcup ac$ (3)

$BC \sqcup bc$ (4)

$AC : ac = BC : bc$ (§ 278)

(6)

$AC : ac = BC : bc$ (5)

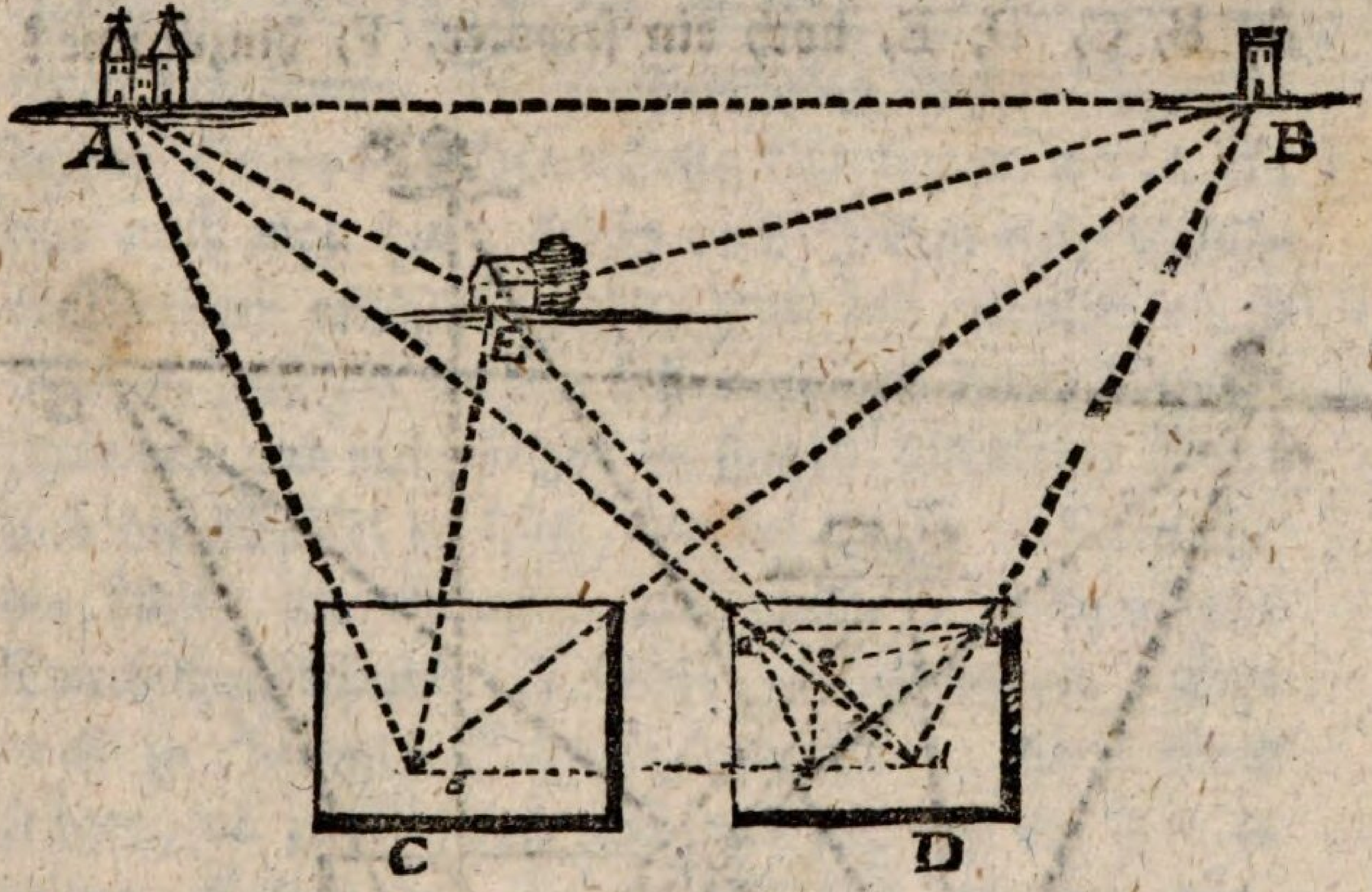
$R = r$ (2)

$\triangle ABC \backsim \triangle abc$ (§ 254)

$AC \sqcup ab$ (280).

§ 291.

L. Wenn man zu den vier Oertern A, B, C, D, (§ 289) noch einen fünften E hinzufügte: liesse sich auch dessen Lage gegen die vorigen wol bestimmen? Zu verstehn, ohne die Linien AB, AC, AE ꝛc. wirklich zu messen.




S. O ja. Das Verfahren wäre wie das vorige, bloß mit dem Unterschiede, daß man zwei Winkel, ACE und BDE, mehr zu messen, und zwei Linien, ce und de, mehr zu ziehn hätte.

L. Recht! Und der Beweis?

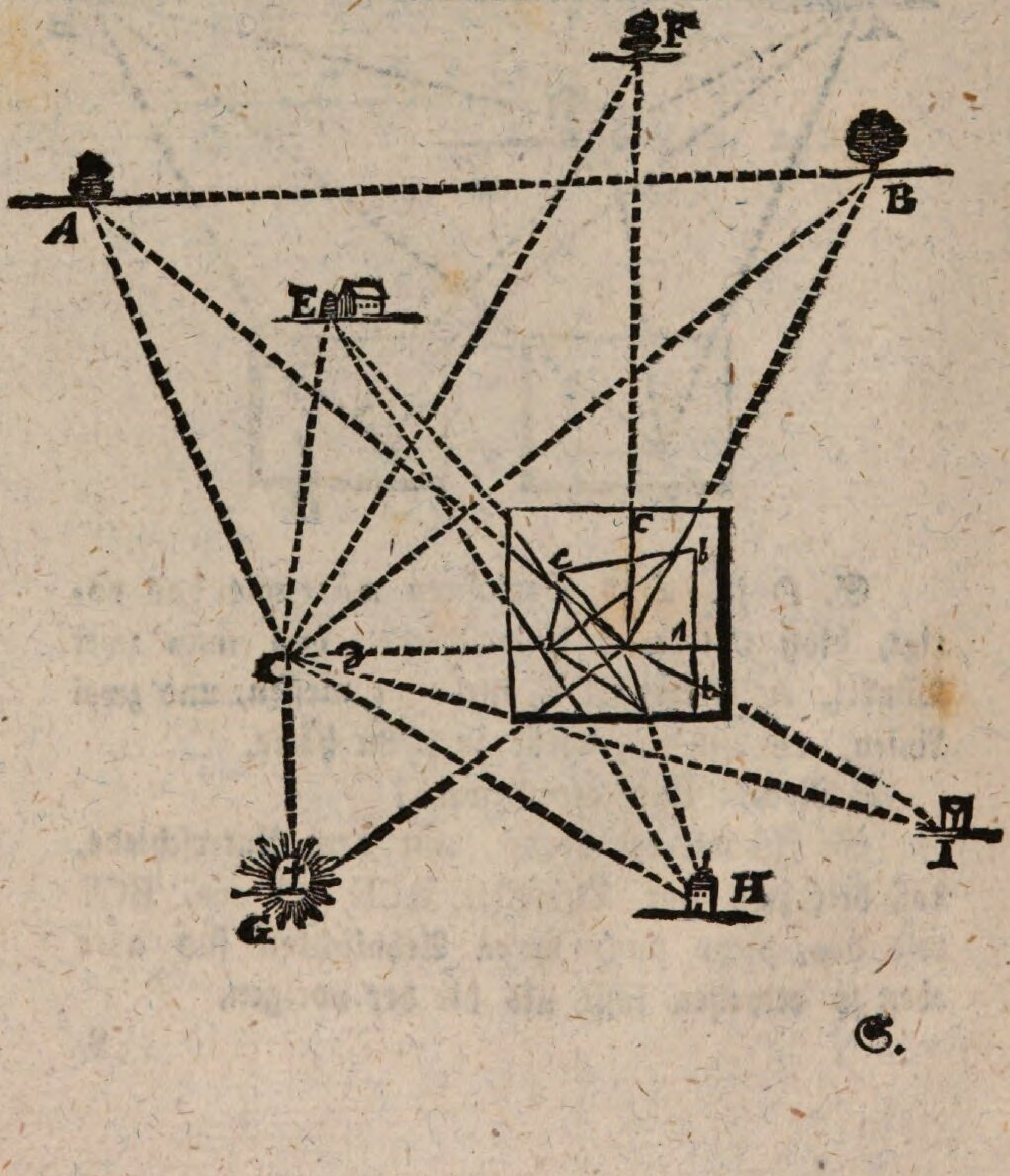
S. Ist wie der vorige, mit dem Unterschiede, daß hier zwei Par DreiEkke, ACE und ace, BCE und bce, mehr sind, deren Aehnlichkeit sich aber eben so erweisen lässt, als die der vorigen.

L.

L. Alles ganz richtig! Wir wissen also nun die Lage von fünf Oertern gegen einander zu bestimmen.

§ 292.

L. Aber wenn zu den vorigen fünf Oertern, A, B, C, D, E, noch ein sechster, F, hinzukäme?



S. So hätte ich noch zwei Winkel mehr, FCD und FDC, zu messen, und aufzutragen in fcd und fdc.

L. Ueberhaupt es mögen der Oerter so viele gegeben seyn, als man will, das Verfahren bleibt das nämliche. Man nennt es eine Gegend aufnehmen, und es ist der Anfang zu Verfertigung einer LandKarte. Die aufzunehmen Oerter können zu beiden Seiten der StandLinie CD liegen, wie G, H; nur muß man diese, (was auch Jedem eigne Erfahrung lehren wird) so ziehn, und den MaßStab so wählen, daß die Linien sich noch auf dem Papiere schneiden, und nicht in gar zu spitzen Winkeln. Denn sind die Winkel zu spitz, wie bei I; so schleifen sich die Linien an einander hin, und der eigentliche DurchschnittsPunkt ist schwer zu bestimmen. Eine noch zu hebende Schwirigkeit ist: Man könte fragen, ob zwei Linien EH und eh, die ein Par zu beiden Seiten der StandLinie CD belegene Oerter verbinden, auch einander gemäß seien?

S. 1) $\left.\begin{array}{l} EC \sqcup ec \\ EH \sqcup eh \end{array}\right\}$ (§ 289)

$EC : ec = EH : eh$ (§ 278)

2) $\angle DCE + \angle DCH = \angle dce + \angle dch$

$\triangle ECH \backsim \triangle ech$ (§ 254)

$EH \sqcup eh$ (§ 280).

L.

L. Recht! Und eben so wird der Beweis von allen übrigen Oertern geführt.

§ 293.

L. Gesetzt aber es wären mehr Oerter aufzunehmen, als man von den StandLinien CD (§ 292) übersehn, oder genau aufnehmen kan?

S. Dan muß man eine neue StandLinie wählen, oder eine auch schon bekante Linie, wie AB, AC, CG ꝛc. dafür annehmen.

L. Dieses Letzte, wenn es tuhnlich ist, (das heißt, wenn die Oerter A, B, C, G ꝛc. so beschaffen sind, und solche Lage haben, daß man selbst von da die noch fehlenden Oerter sehen und die Winkel messen kan) ist das Beste. Ist man aber genötigt eine neue StandLinie zu wählen; so muß sie so beschaffen seyn, daß man von ihren EndPunkten wenigstens zwei der schon aufgenommenen Oerter von neuem aufnehmen, und so beide Messungen mit einander verbinden könne. —

§ 294.

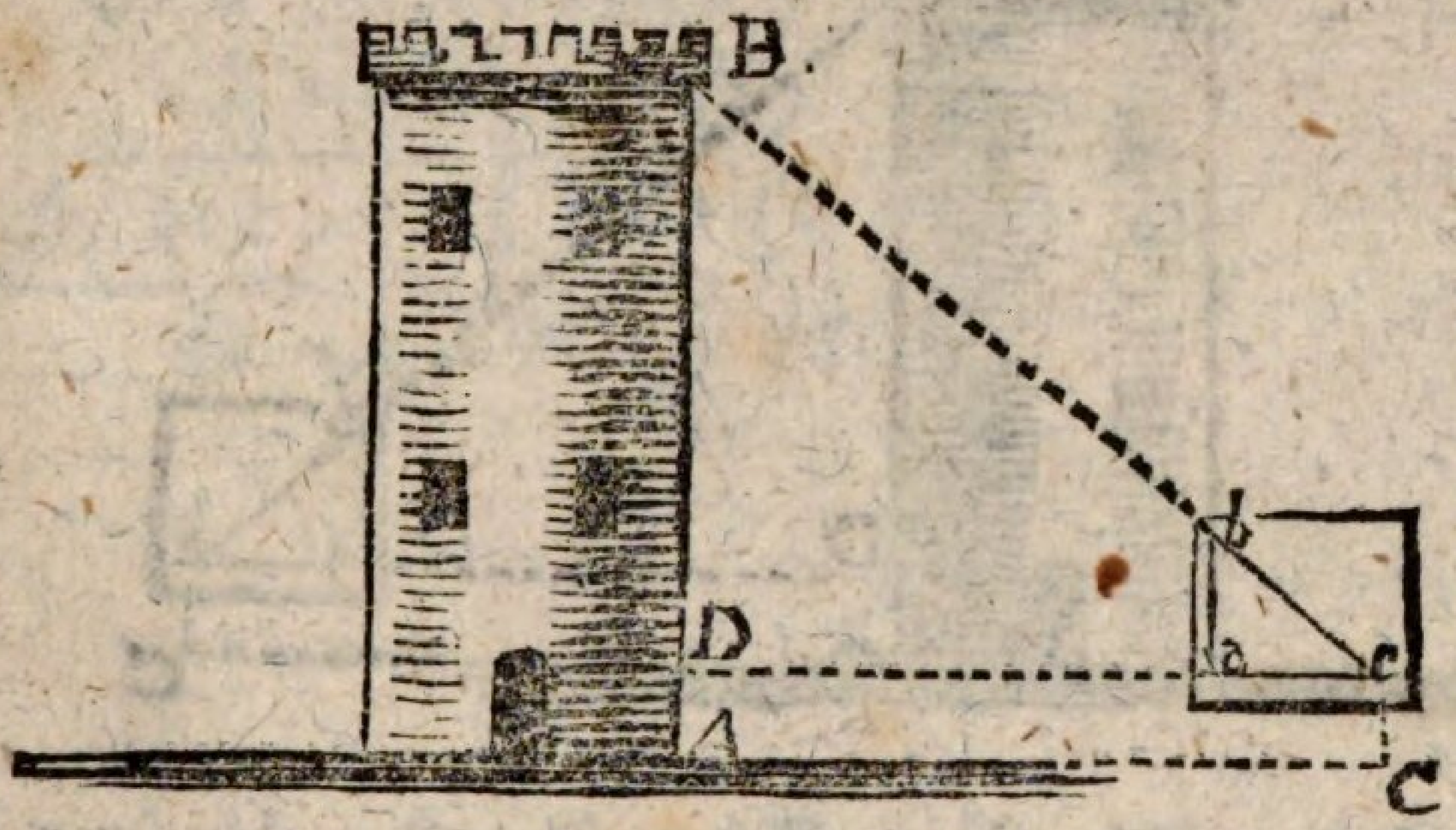
Zu großen und weitläuftigen Messungen ist der MeßTisch nicht so bequem, als ein gutes Astrolabium. Zwar ist das Auftragen der Winkel mit dem WinkelMesser (§ 217) sehr unzuverlässig; aber die Trigonometrie zeigt ein genaueres Verfahren, indem sie die Länge der DreiEkks-Seiten berechnen, und folglich die DreiEkke ohne WinkelMesser auftragen lehrt.

Sieb-

## Siebzehnter Satz.

§ 295.

L. Lässt sich auch wol eine Höhe messen, deren Fuss nur zugänglich ist, nicht aber die Spitze; wie z. B. die Höhe eines Turms, AB?




S. Ich kan ja die Höhe wie eine Linie auf der Erde betrachten, deren einer EndPunkt unzugänglich ist (§ 286).

L. Das ist zwar richtig: aber es können doch Umstände dabei vorkommen, die Schwirigkeiten machen. Wie wird, z. B., die Grösse des Winkels A gefunden?

S. Den muss ich für einen rechten annehmen; denn jedes Gebäude wird ja senkrecht aufgeführt.

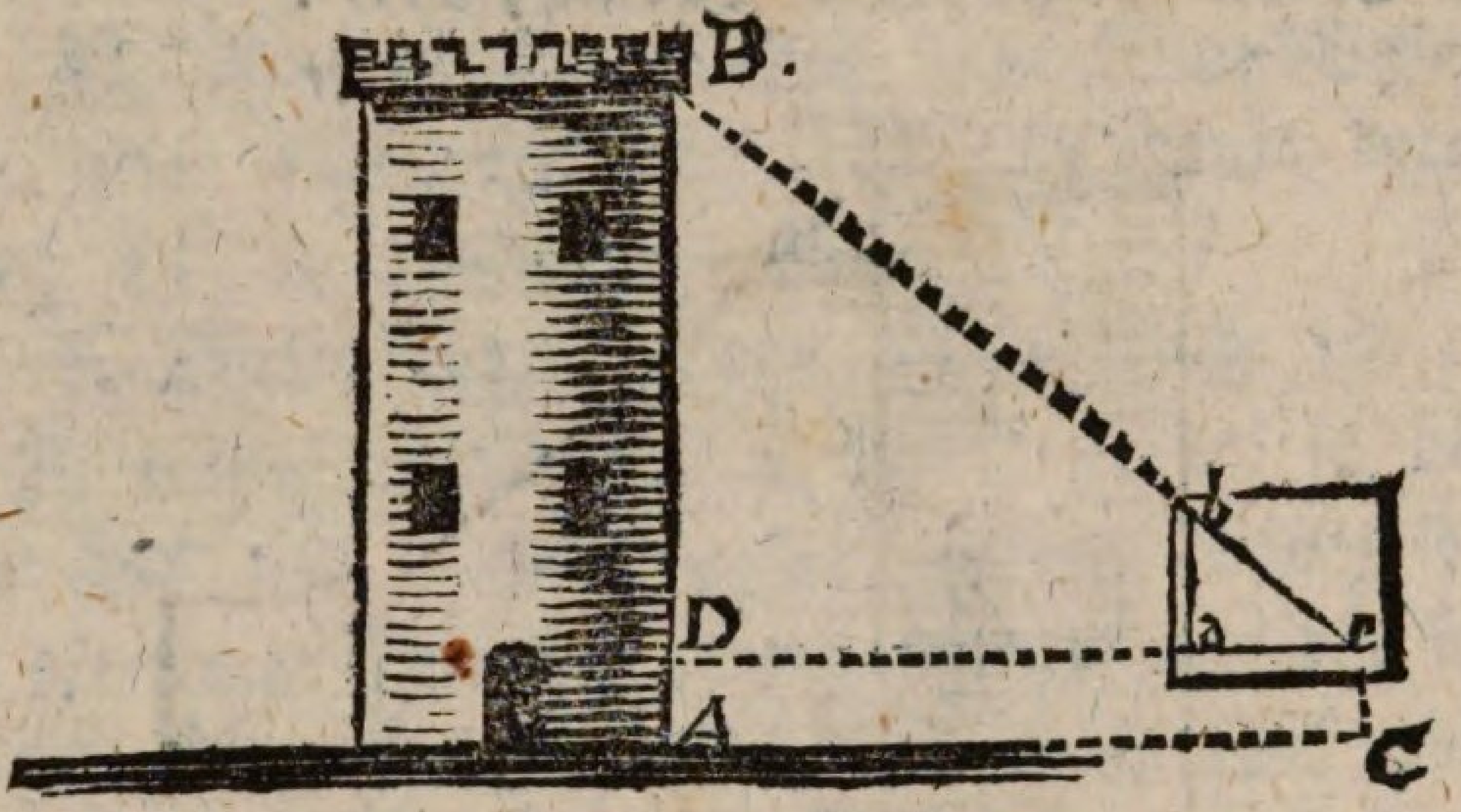
L. Gut: aber der Boden worauf es steht kan abhängig seyn.



Bayerische Staatsbibliothek München

S. Daran liegt nichts. Das Gebäude steht nicht auf seinem Boden senkrecht, sondern auf der WasserFläche.

L. Nun wir wollen sehn, wie du zu Werke gehn wirst.




S. Ich wähle einen StandOrt C, von wo ich die Höhe vom Fuß bis zur Spitze übersehn kan; stelle, durch Hülfe einer BleiWage, die Fläche meines MeßWerkzeuges scheitelrecht, und seine untere Seite wagerecht; sehe durch die Dioptern des wagerechten Lineals nach dem GegenStande dessen Höhe ich messen will, ziehe cd, und bemerke da den Punkt D, wo die verlängerte Linie cd hintrift. Hierauf drehe ich das Lineal um den Punkt c, bis ich durch die Dioptern die Spitze B erblikke, und ziehe die Linie cb. Dan messe ich CA, gleich CD (§ 273) und mache cd gemäß CD. Endlich errichte ich in d eine senkrechte Linie, so erhalte ich db

db $\sqcup$ DB. Wenn ich nun diese, nach dem verjüngten MaßStabe messe, und dem gefundenen Maß das von AD hinzufüge; so habe ich die Höhe von AB.

L. Ganz recht! Es fehlt nur noch der Beweis, daß db gemäß DB sei.

S. $c = C$ (Vers)
$d = D$ (§ 48)

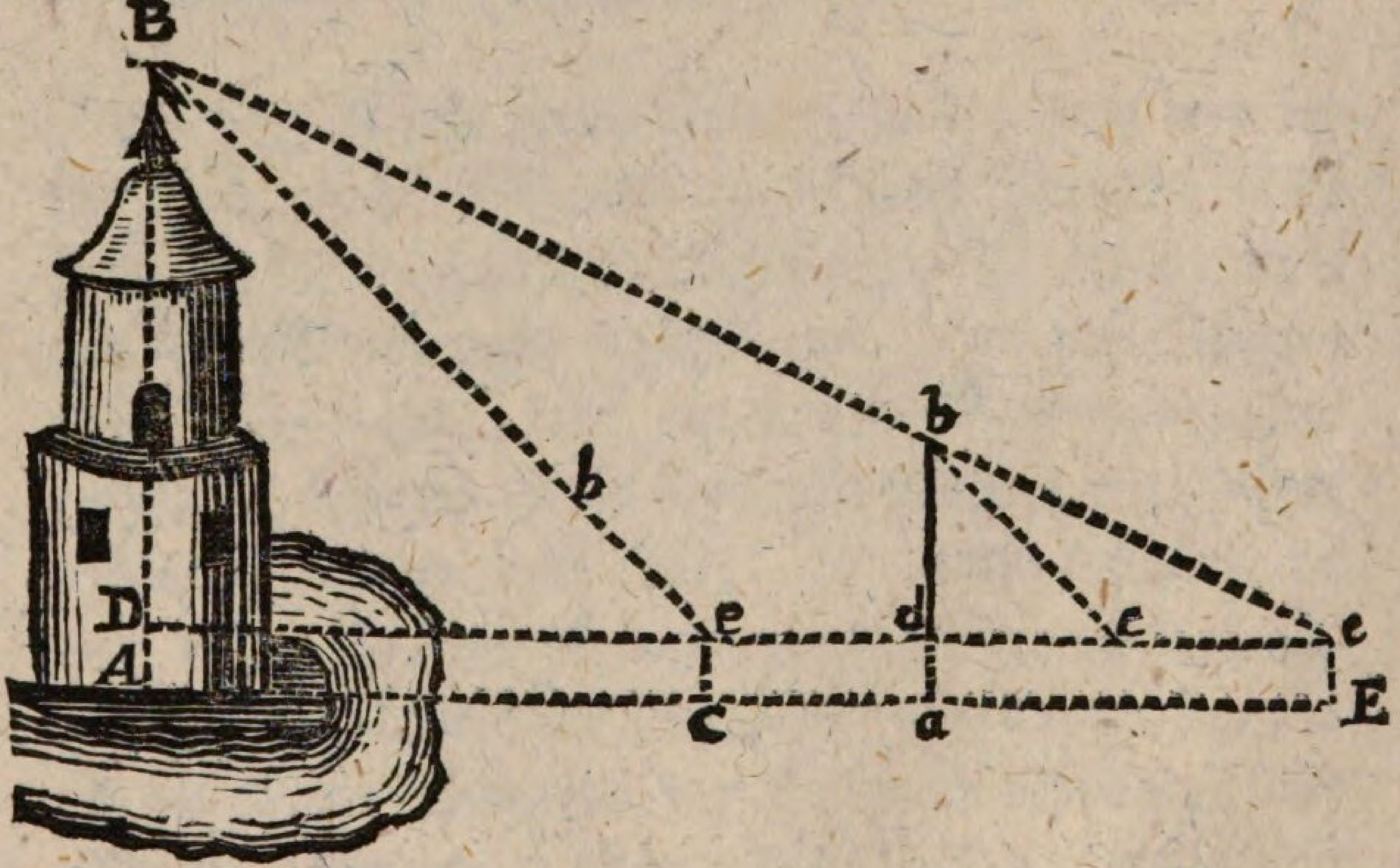
$\triangle\, bcd \backsim \triangle\, BcD$ (§ 256)

db $\sqcup$ DB (§ 280).

## Achtzehnter Satz.

§ 296.

L. Wie wird aber eine Höhe AB gemessen; von der weder Spitze noch Fuß zugänglich ist? Bei der unzugänglichen Linie auf der Erde (§ 289) wählten wir die StandLinie CD, der Bequemlichkeit wegen, der zu messenden AB gegen über: wolte man eben das Verfahren hier nachahmen, so müßte man einen StandtPunkt in der Luft annehmen.



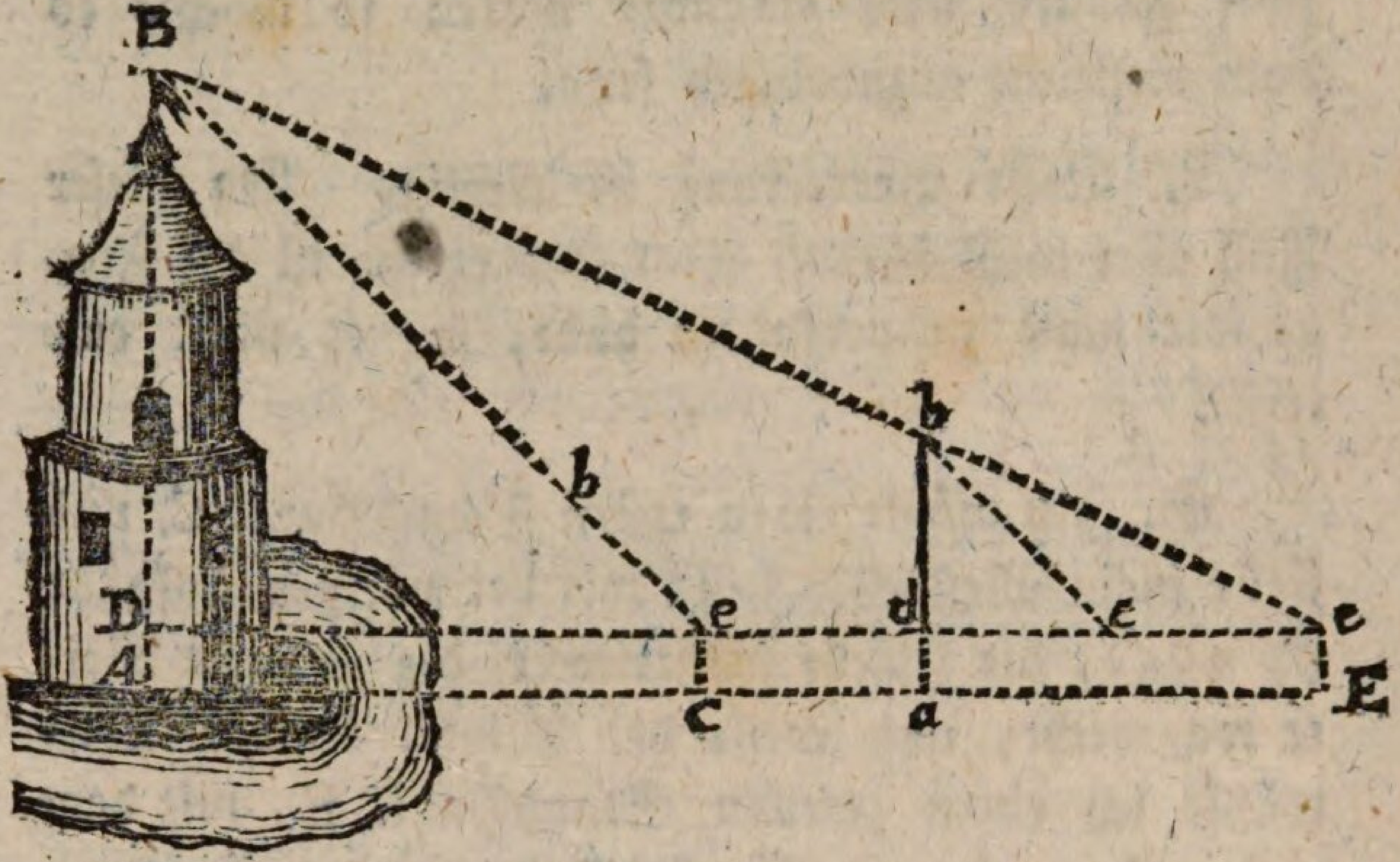
S. Wenn ein Gebäude gegenüber stünde das zwei Fenster über einander hätte; so möchte es doch vielleicht anzubringen seyn.

L. Diese Bemerkung ist richtig. Da dieser Fall aber nicht überall Stat findet; so ist die Frage wie man zu verfahren habe, wo er nicht eintrift?

S. Ich wähle einen ersten StandPunkt C, und stelle mein Meß-WerkZeug wie bei voriger Aufgabe (§ 295), die Fläche scheitelrecht, die unterste Seite wagerecht, und messe den Winkel BcD. Dan wähle ich einen zweiten StandPunkt E, mit dem ersten C, und dem Punkte D in gerader Richtung (§ 271); messe CE; mache ce gemäß CE; stelle mein WerkZeug wie vorhin, und messe den Winkel BeD. Aus den DurchschnittsPunkte b, der aus c und e nach B gezogenen Linien, lasse ich nun auf die Verlängerung von ec eine senkrechte Linie bd fallen; so ist bd gemäß BD, und ich darf nur AD = Ee addiren, um AB zu haben.

L. Und der Beweis?

S. Es kömt hier darauf an, daß ich die Aehnlichkeit der DreiEkke BcD, und bcd erweise (§ 280); und diese ist erwiesen, wenn ich zeige daß in beiden zwei einzelne Winkel, D und d, BcD und bcd, gleich sind (§ 255).




$$\begin{array}{l} \angle BCD = \angle bcd \text{ (V.)} \\ \angle D = \angle d \text{ (V. u. § 48)} \\ \hline \triangle BCD \backsim \triangle bcd \text{ (§ 255)} \\ \hline BD \sqcup bd \text{ (§ 280)} \end{array}$$

L. Es wurde angenommen es sei AD = Ee. Dieses setzt voraus das AE wagerecht sei. Gesetzt aber das wäre nicht?

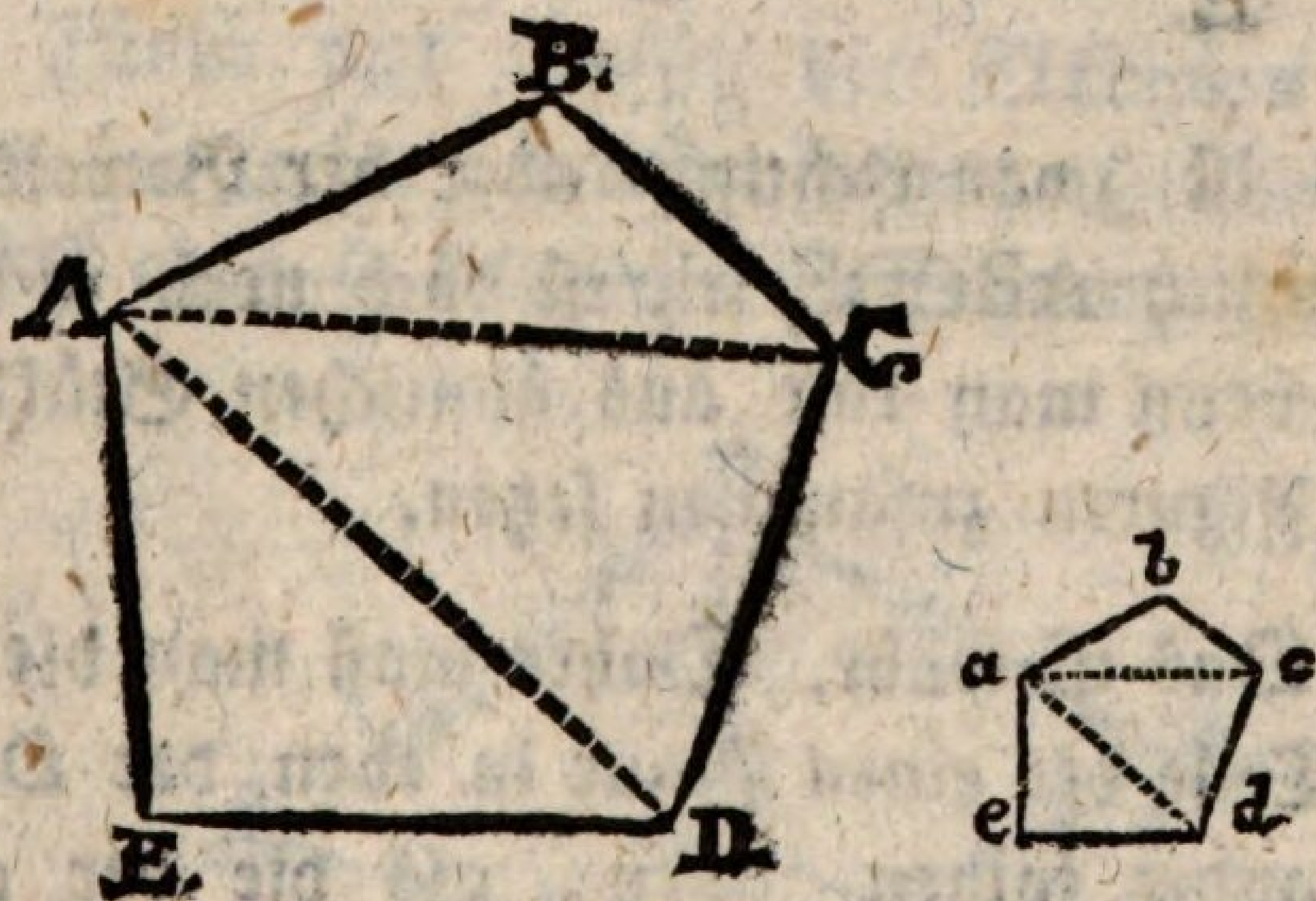
S. Dan müste AD besonders gemessen werden. auf die Art wie DB gemessen ist, nur mit dem Unterschiede, daß, wenn man sich eines HalbKreises bediente, man ihn umkehren müste.

Neun-

## Neunzehnter Saz.

§ 297

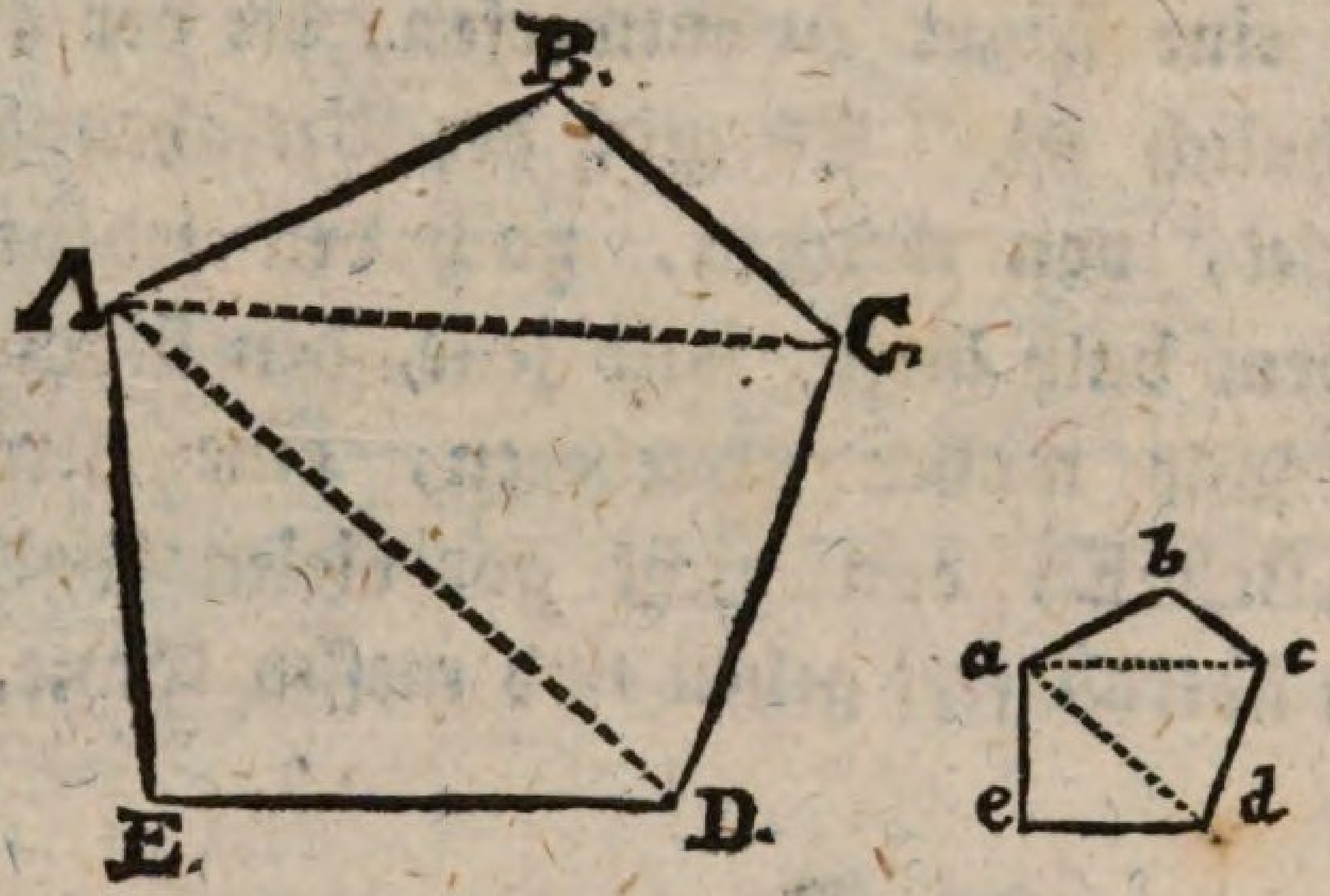
L. Nun wird es auch nicht mehr schwer seyn ein Feld aufzunehmen: das heisst: Auf dem Papiere eine Figur zu entwerfen, die der auf dem Felde ähnlich sei. Es gibt der VerfahrungsArten mancherlei, von welchen, nach den jedesmaligen Umständen, bald diese, bald jene, den Vorzug verdient. Wir wollen annehmen, eine geradlinige Figur ABCDE, von nicht gar vielen Seiten, in der man überall frei gehen und messen könne.




S. Da darf ich nur alle Seiten der Figur, AB, BC, CD, DE, EA, und zwei EkkLinien oder Diagonalen, AC, AD, messen, und dan, DreiEkke abc, acd, ade zeichnen, deren Seiten

denen der Dreiekke ABC, ACD, ADE gemäß sind (§ 87); so erhalte ich

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\ abc \backsim \triangle\ ABC \\ \triangle\ acd \backsim \triangle\ ACD \\ \triangle\ ade \backsim \triangle\ ADE\end{array}\right\}\ (\S\ 289)$$




Das ist zwar richtig, aber der Beweis, daß abcde ähnlich ABCDE sei, ist doch noch nicht vollständig; denn man kan aus ähnlichen Stükken unähnliche Figuren zusammen setzen.

S. Das ist wahr. Daher muß man die Stükken der Teile der einen Figur in eben der Ordnung auf einander folgen lassen, als die der andern, dan kan man versichert seyn, daß zwei und zwei Seiten der einen proportionirt sind zwei und zwei Seiten der andern (§ 278); und daß die zwischen den proportionirten Seiten eingeschlossenen Winkeln einander gleich sind (§ 18).

L. Daraus ist klar daß

$$AB : BC = ab : bc$$
und $\angle B = \angle b$

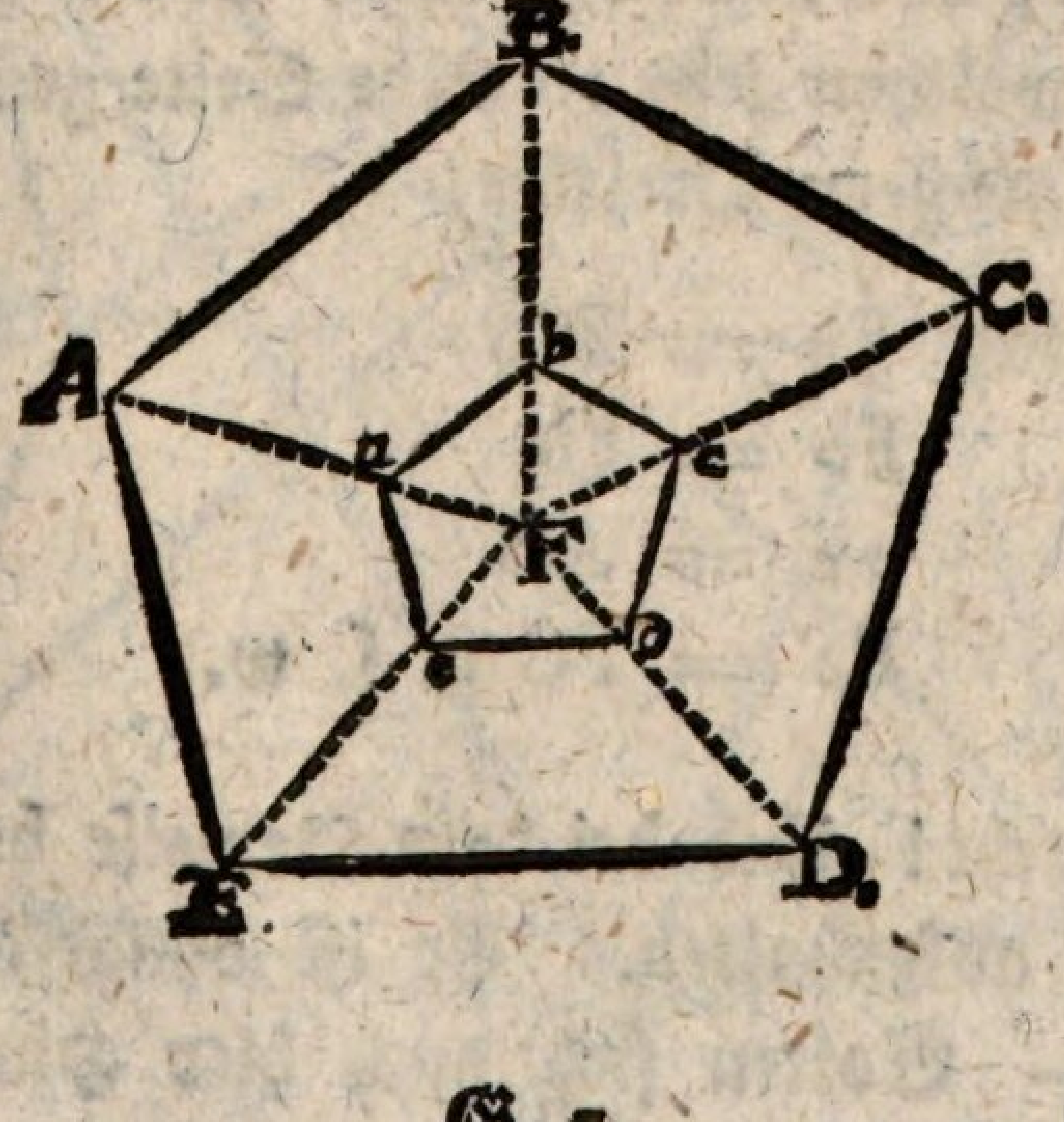
Man könte aber noch die Gleichheit der Winkel A und a bezweifeln.

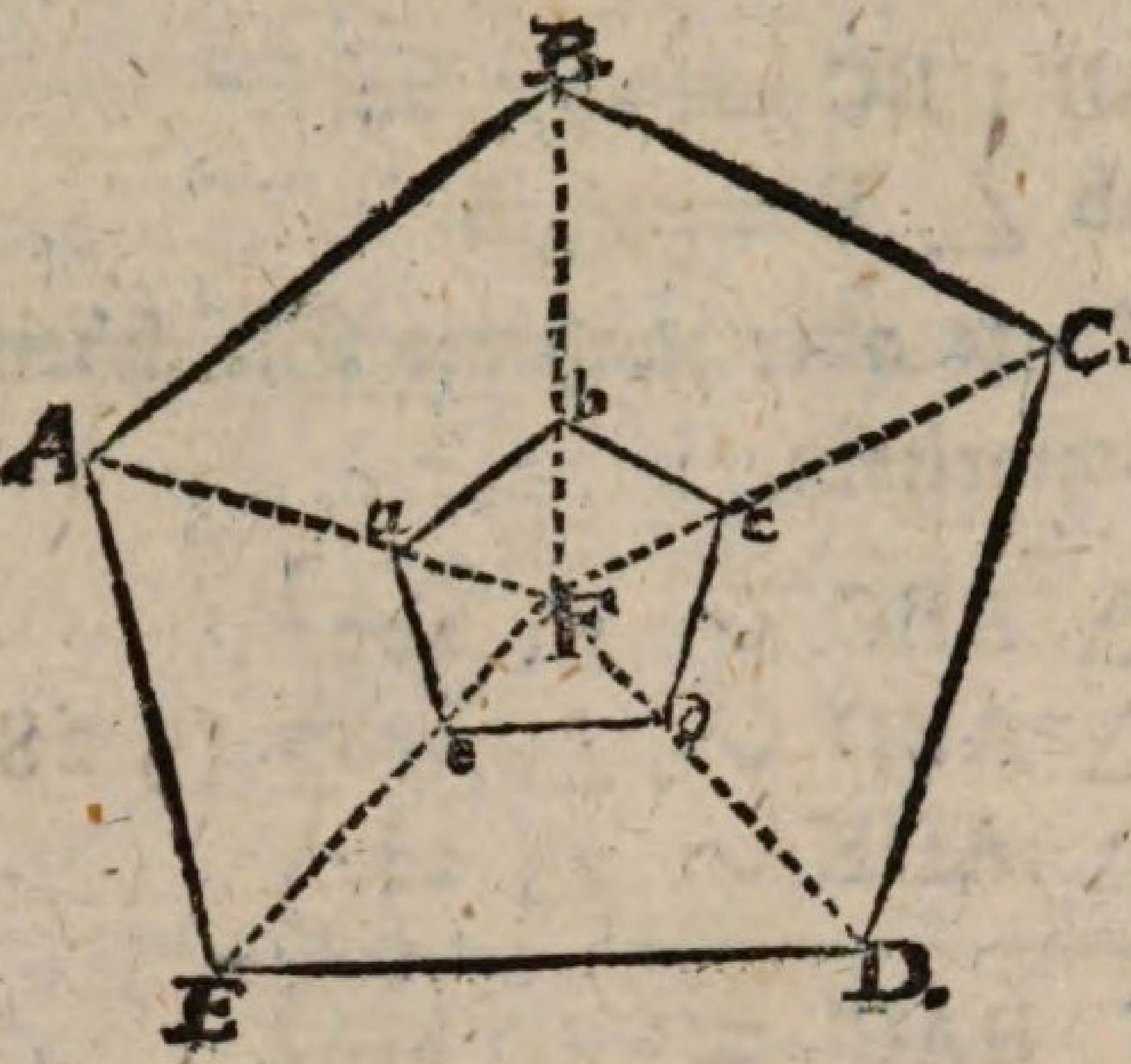
S. $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \backsim \triangle abc \\ \triangle ACD \backsim \triangle acd \\ \triangle ADE \backsim \triangle ade\end{array}\right\}$ (§ 289)

$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle bac \\ \angle CAD = \angle cad \\ \angle DAE = \angle dae\end{array}\right\}$ (§ 18)

$\angle A = \angle a$ (§ 32)

L. Fände das Messen der EkLinien Schwirigkeiten, so zeigt die nebenstehende Zeichnung eine andre fast eben so bequeme VerfahrungsArt.






S. Ich wähle innerhalb der Figur einen Punkt F, von wo ich nach allen Ekken ungehindert messen kan; stekke die Linien FA, FB, FC, FD, FE ab (§ 271), messe sie, so wie auch die Seiten der Figur, AB, BC, CD, DE, EA (§ 273). Hierauf setze ich eine Figur abcdea aus lauter DreiEkken, aFb, bFc, cFd, dFe, eFa, zusammen, in welchen jede einzelne Seite gemäß ist einer Seite der grössern Dreiekke,

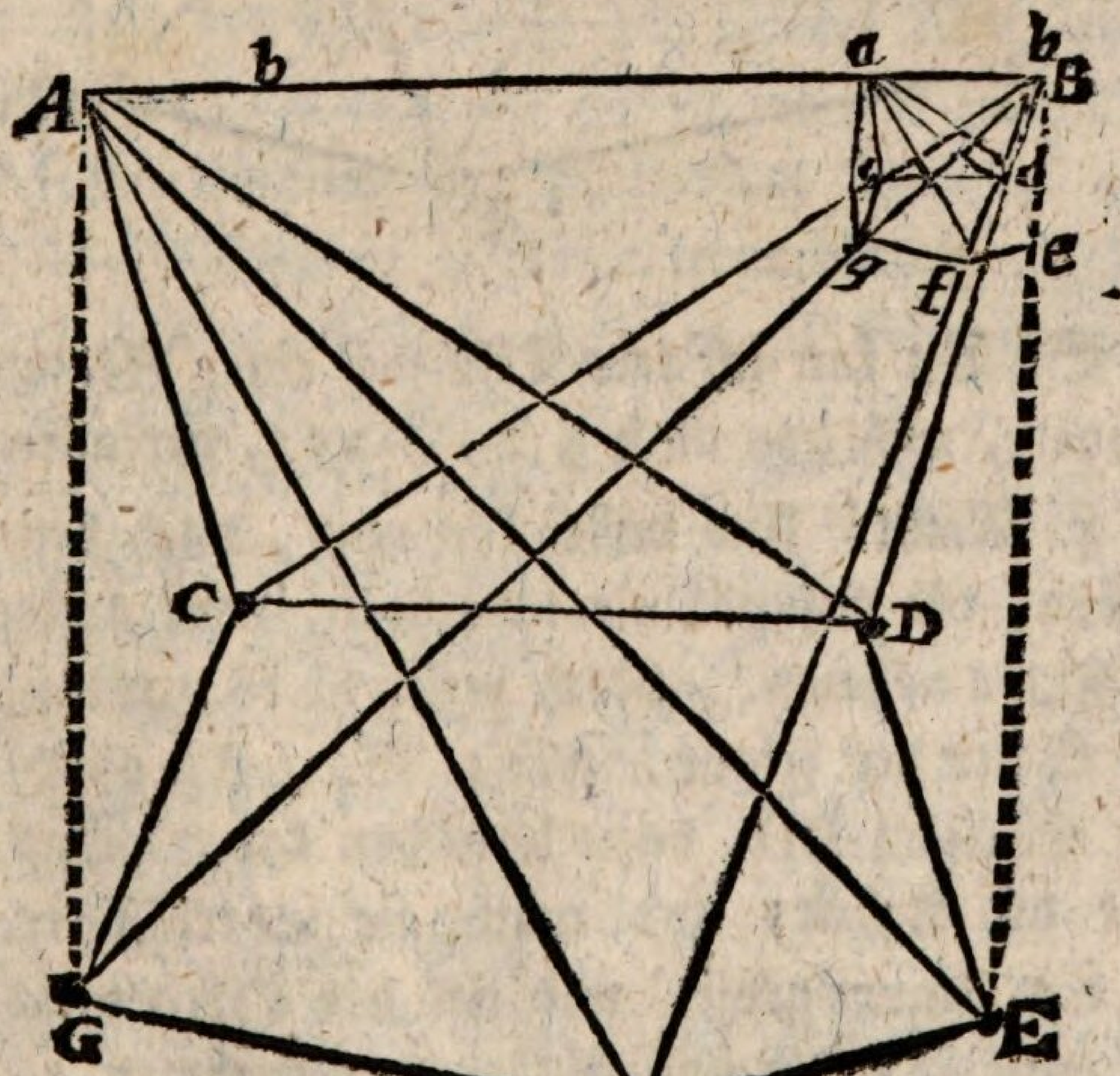
nemlich Fa = FA
Fb = Fb
ab = AB
Fc = FC u. s. w.

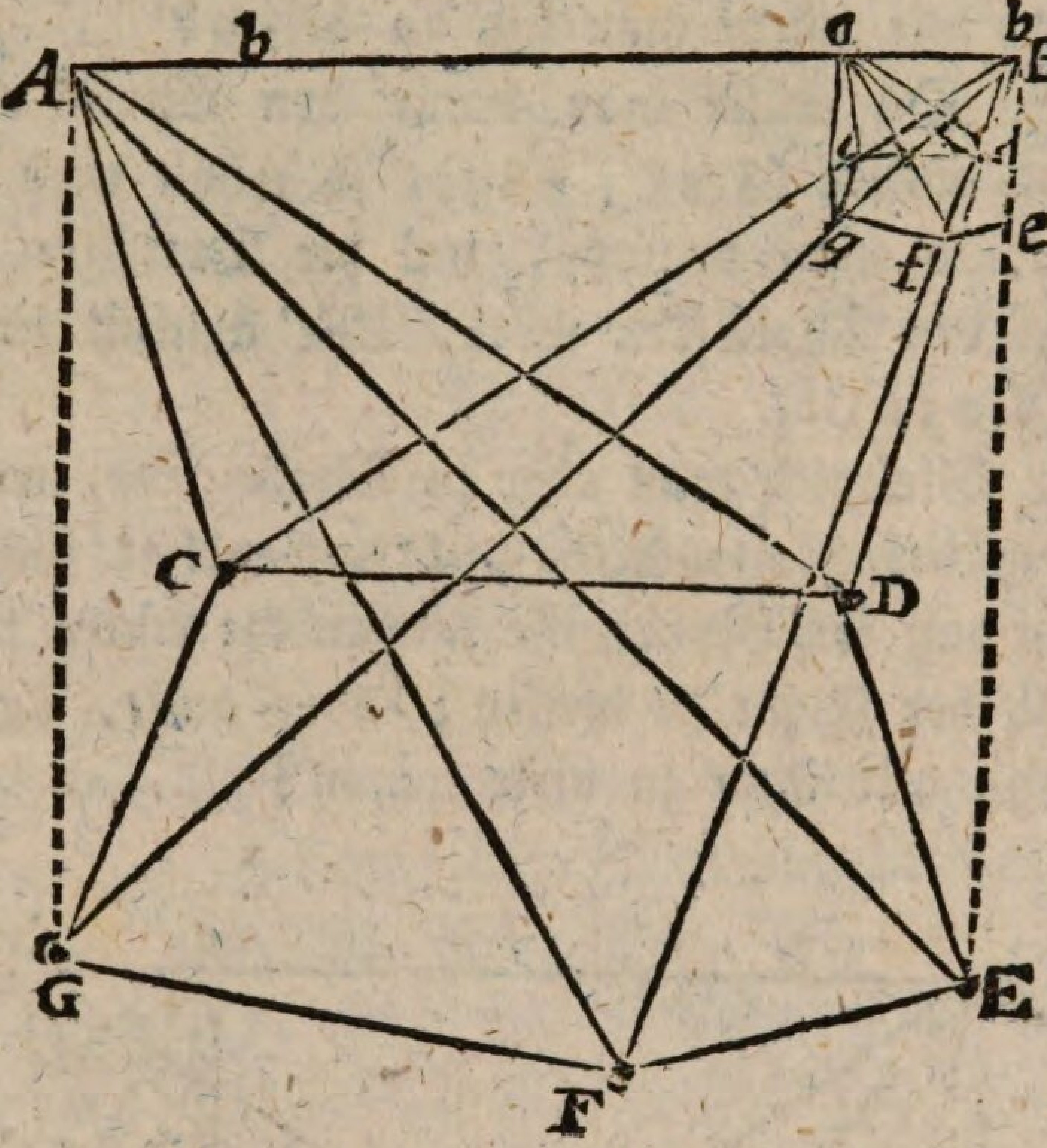
L. Recht! Und bei dem Beweise brauchen wir uns kaum aufzuhalten. Er ist ohngefähr wie der vorige. — Solten sich auch hier Hindernisse finden,

den, eine oder die andre Seite AB, BC 2c. zu messen, wie würde man sich da helfen?

S. Da müste man dafür den Winkel AFB, BFC 2c. messen (§ 283 284); so erhält man auch so viel als man braucht, um die DreiEkke aFb, bFc 2c. den DreiEkken AFB, BFC ähnlich zu machen (§ 254).

L. Wie wird man aber zu Werke gehn, wo die vorigen VerfahrungsArten nicht anwendbar sind; es sei nun daß sich Hindernisse fänden die Linien innerhalb der Figur zu messen; oder auch, daß sie zu lang, und ihrer zu viele wären?





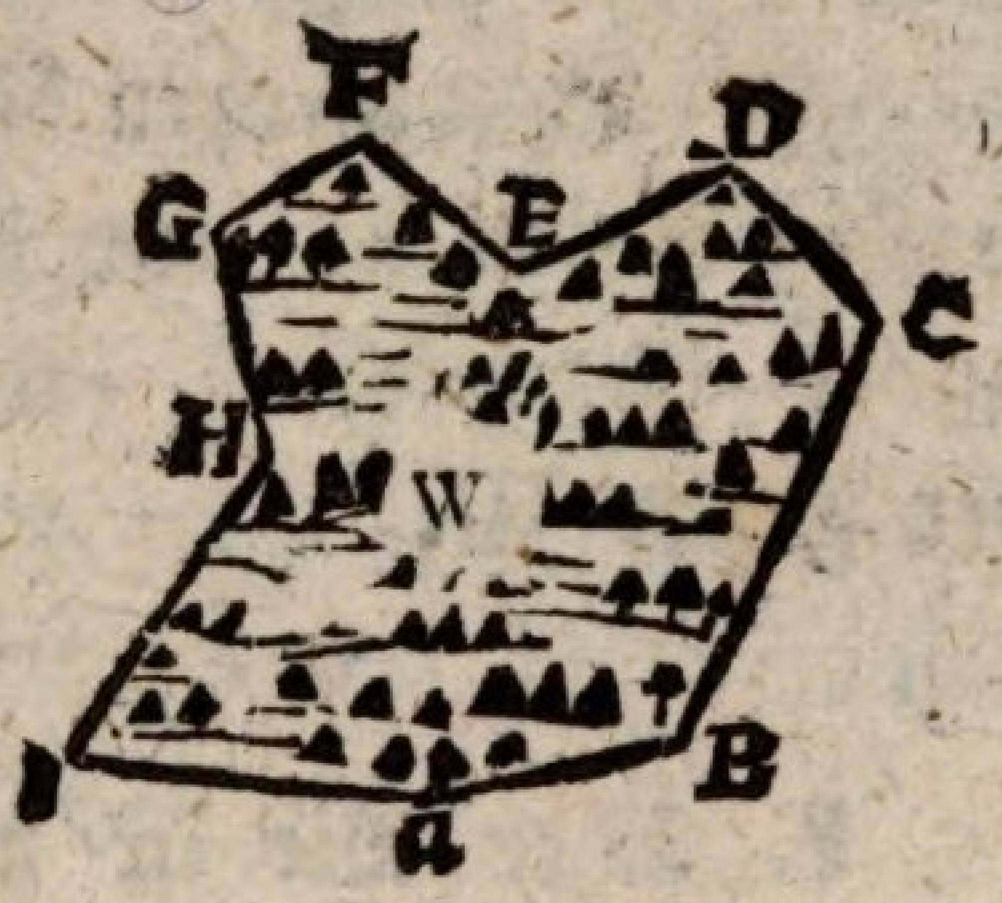

S. Da kan ich jede Ekke mit einer Stange bezeichnen, und dan nach § 291, 292, verfahren.

L. Recht! Und dabei kan man, nach den Umständen, die StandLinie innerhalb, oder ausserhalb der Figur nehmen. Noch besser ist es, wenn man eine Seite der Figur, wie z. B. AB, oder auch eine EkkLinie CD, dazu brauchen kan. Das verkürzt die Arbeit, und macht sie zuverlässiger. — Ist die Figur groß, und hat der Ekken viele, so kan man sie teilen und stükkweis aufnehmen.

Zwan-

## Zwanzigster Satz.

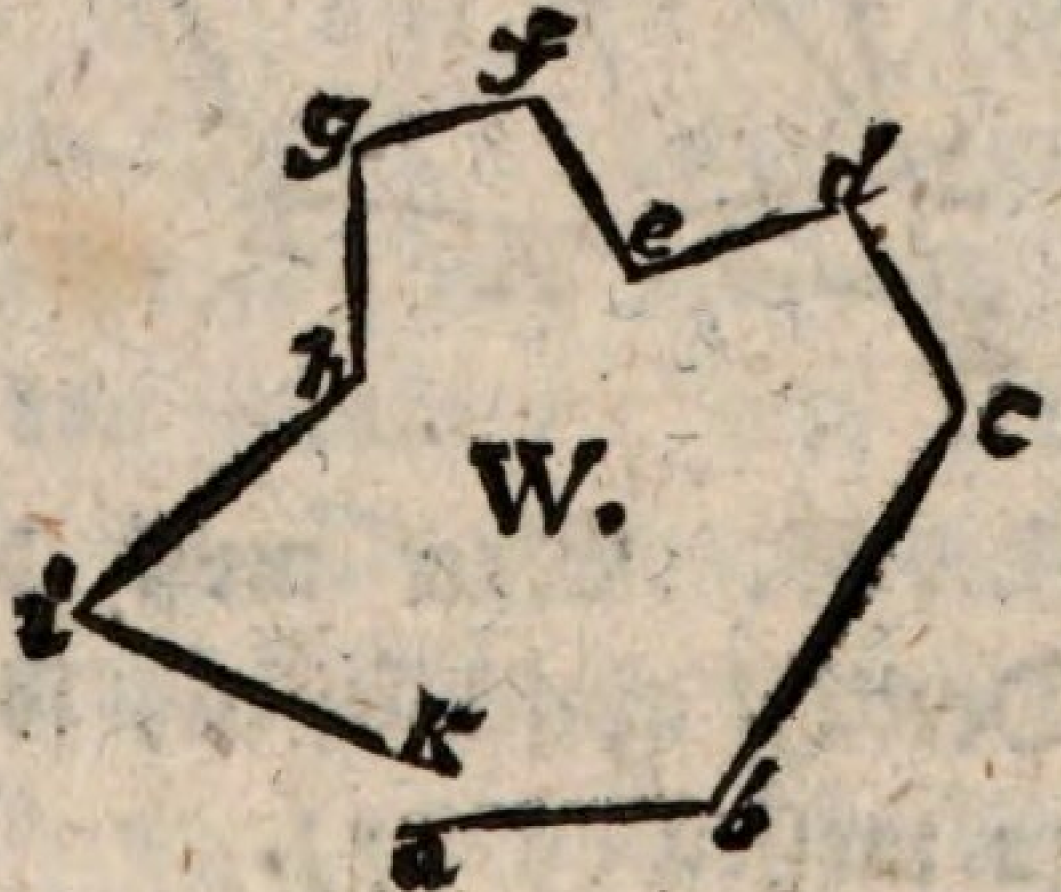
### § 298.




L. Es gibt noch ein Mittel eine geradlinige Figur die man umgehn, aber nicht übersehn kan, aufzunehmen. Wie würde man z. B. einen Wald W in Grund legen?

S. Ich müste alle Winkel A, B, C ꝛc., und alle Seiten AB, BC, CD ꝛc. der Figur messen.

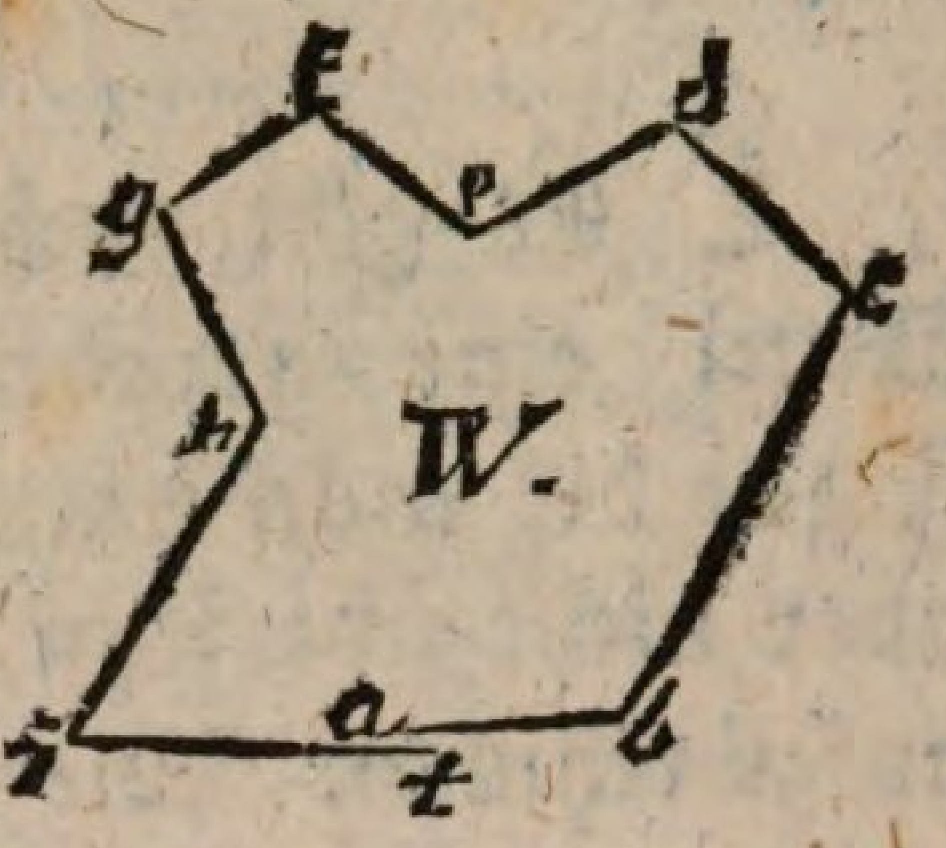
L. Das ist richtig: da aber, wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge die Fehler fast unvermeidlich sind; da man bei jedem Winkel zwei Mal fehlen kan, nämlich ein Mal beim Messen, und dan beim Auftragen; überdies jeder einzelne Fehler auf das Ganze Einfluß hat: so ist diese Verfahrungsart äusserst unzuverlässig. Wir wollen einmal annehmen die Summe der innern Winkel der Figur W wäre etwas zu groß: was wird die Folge davon seyn?



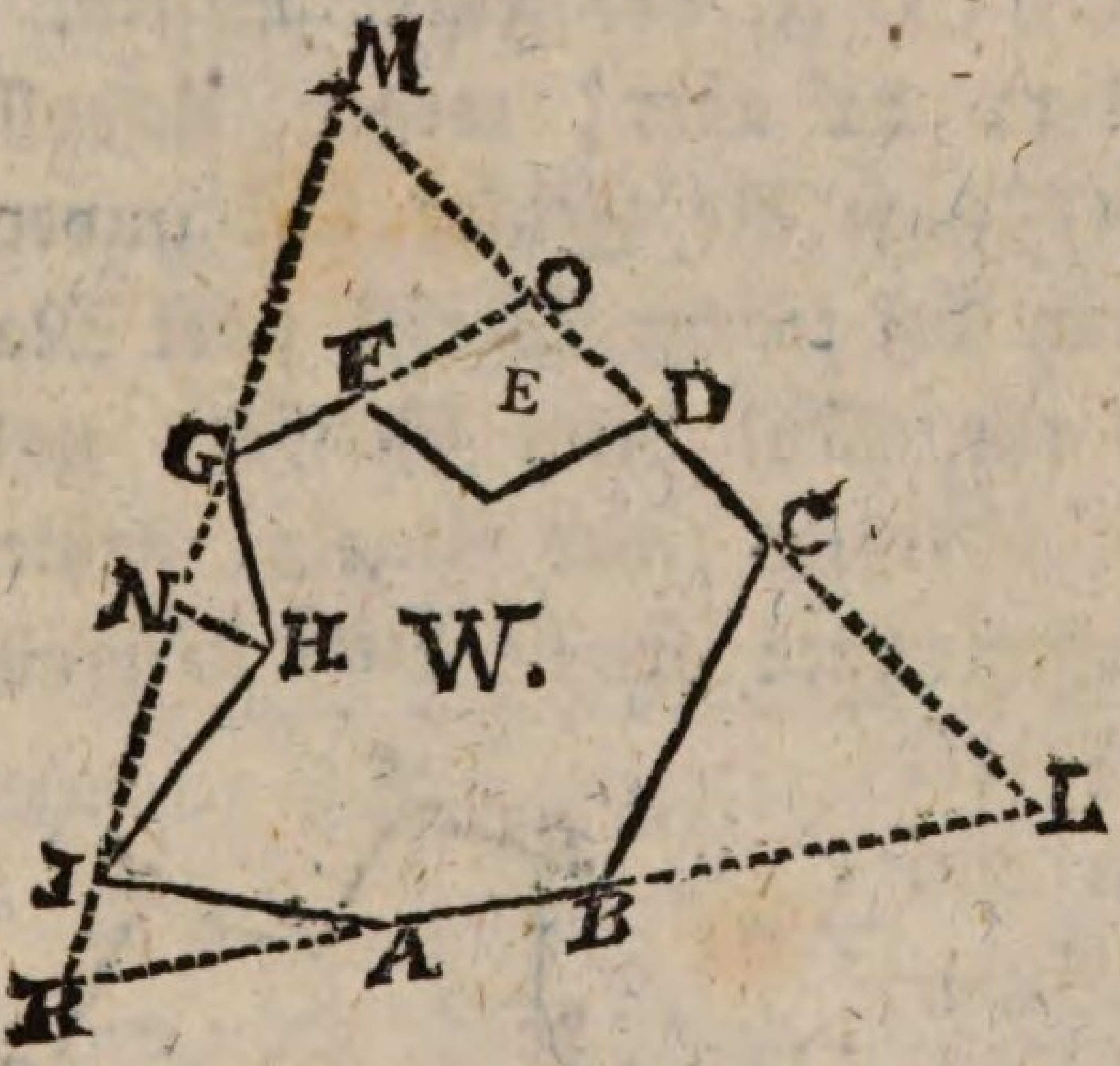

S. Die Figur wird nicht schliessen. Das heisst: die beiden äussersten Linien (nämlich ab wo ich anfange, und ik wo ich aufhöre, werden einander nicht erreichen.

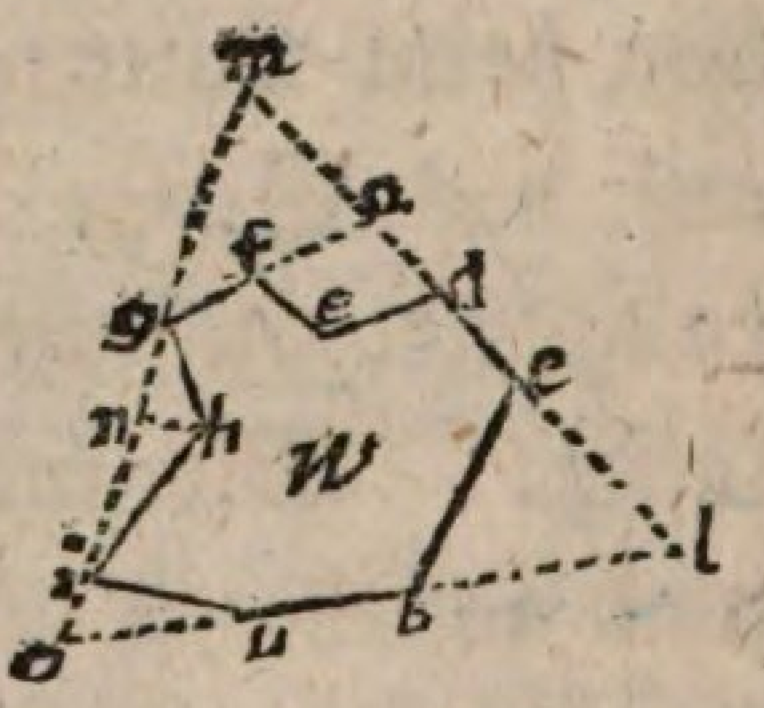
L. Aber angenommen die Summe der Winkel wäre zu klein?

S. Dan werden die äusersten Linien ab und it einander überreichen, wie in der Figur W.




L. Aber wie ist diesem Uebel abzuhelfen? — Hier ist die Zeichnung.



S. Man muß die gegebene Figur in ein DreiEkk einschliessen, so braucht man keinen Winkel zu messen (§ 87).

L. Recht! Aber was ist dabei weiter zu beobachten?

S. Um unnöthige Messungen zu ersparen muß man die Seiten des DreiEkks so ziehn, daß sie entweder Seiten der Figur, (wie AB, DC) oder Ekken derselben, (wie I und G) streifen. Messe ich nun die Weiten IK, KA, AB, LC, CD, MG: so erhalte ich die Punkte I, A, B, C, D, G; und mit ihnen die Linien IA, AB, BC, CD (§ 5), die ich, nach dem verjüngten MaßStabe, zu Papier bringen kann, in W.

L. Nun fehlen noch die Linien DE, EF, FG, GH, HI.

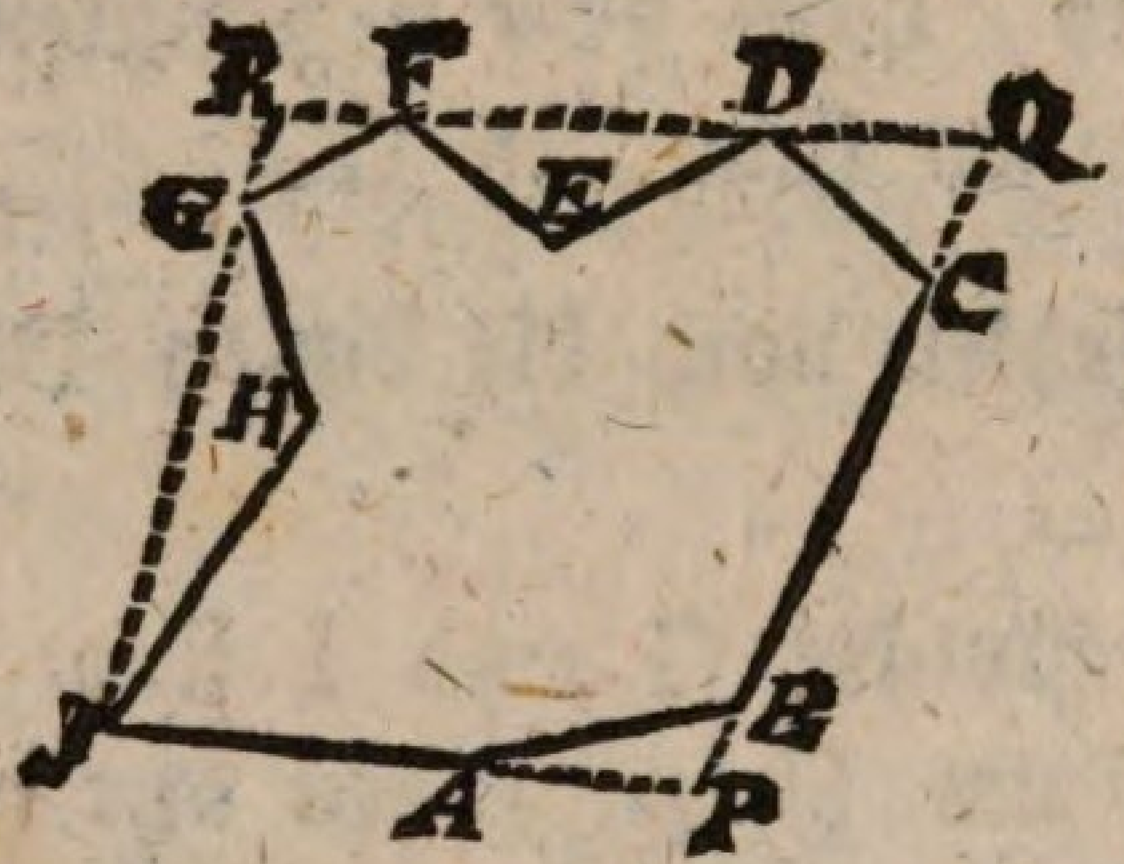
S. Die Punkte G und I sind schon bekant. Ich darf also um H zu finden nur die Linien GH uud HI messen, und mit ihrem verjüngten Maß aus g und i einen Durchschnitt machen. Oder ich kan auch aus H eine senkrechte Linie HN auf KM fallen lassen (§ 69); so geben die Längen GN und NH die Lage des Punktes H, und mit ihm die Linien GH und HI, oder gh und hi. Verlängre ich GF, bis sie ML in O schneidet, und messe MO und GF; so gibt mir das den Punkt o, und die Linie gf. Endlich gibt mir ein Durchschnitt aus d und f, mit dem verjüngten Masse der Linien DE und EF, den Punkt e, und die Linien de, ef.

L. Aber wird es auch überall angehn, die gegebene Figur in ein DreiEkk einzuschliessen? Gesezt

es

es fände sich ein Hinderniß in L, die Linien KL, und ML bis dahin zu führen?

S. Dan müste ich einer, oder beiden, eine andre Richtung geben, damit sie anderwärts zusammen stiessen. Oder ich könte auch die Figur in ein ViertEkk IPQR einschliessen.




L. Da müste denn aber, um es aufs Papier zu bringen, wenigstens ein Winkel gemessen werden.

S. Dazu würde ich den Winkel Q wählen. Den könte ich, ohne WinkelMesser, nach § 284, zu Papier bringen.

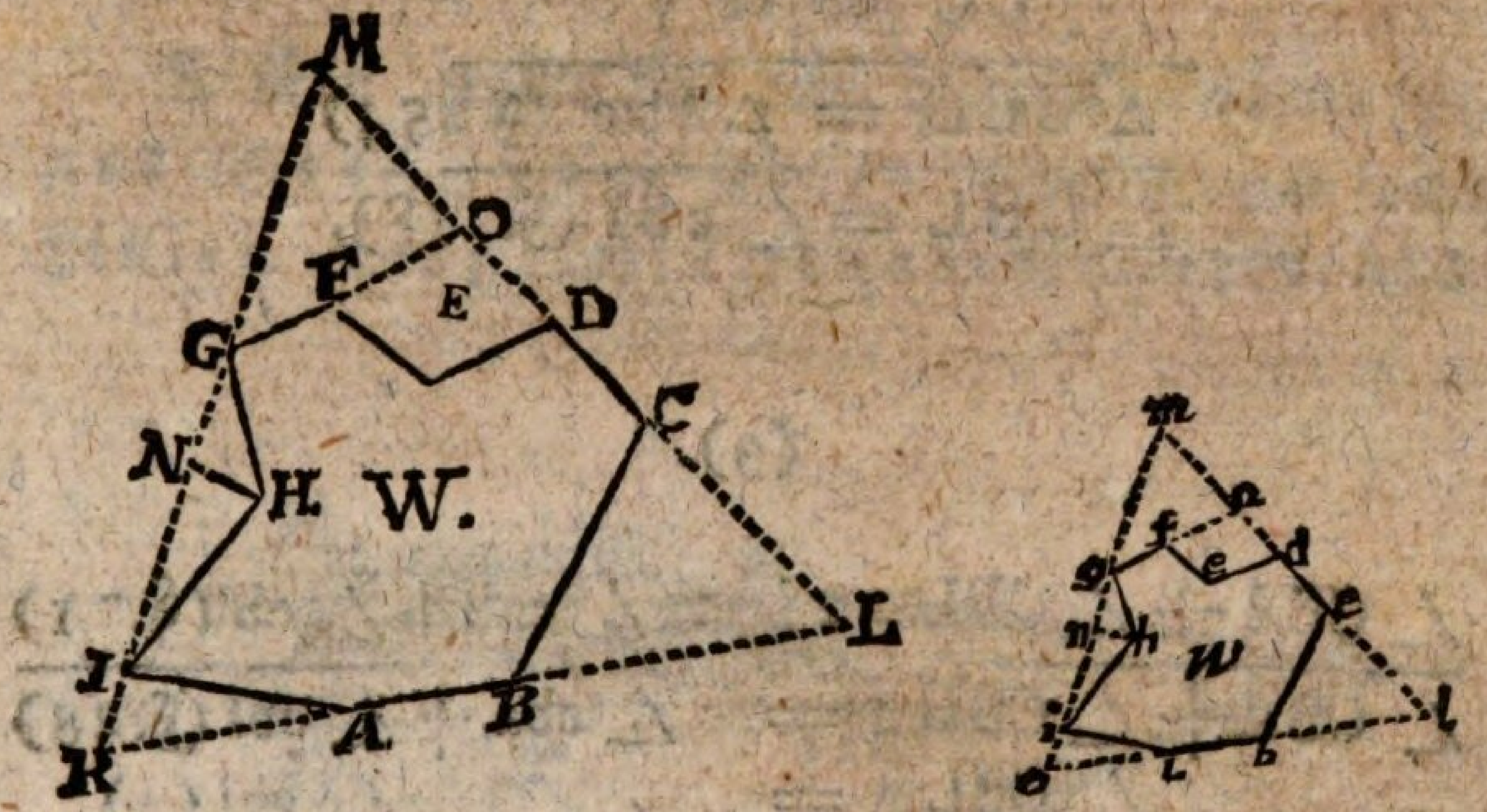
L. Nun fehlt noch der Beweis der Aehnlichkeit der Figuren W und w. Was wird dazu erfodert?

S. Daß alle gleichliegende Winkel gleich, und alle gleichliegende Seiten proportionirt seien.

L. Wir wollen uns begnügen dieses an denen in DreiEkke eingeschlossenen Figuren von einem

Pare

Pare Winkel ABC und abc und von zwei Par Seiten AB und ab, BC und bc zu zeigen. Was für einen Gang wird der Kreis nehmen?




S. Die Gleichheit der Winkel ABC und abc setzt die der Winkel CBL und cbl voraus. Die Gleichheit der Winkel CBL und cbl setzt voraus die Aehnlichkeit der Dreiekke LBC und lbc; und die Gleichheit dieser Dreiekke erfodert die Gleichheit der Winkel L und l.

(1)

$$\left.\begin{array}{l} KL = kl \\ LM = lm \\ MK = mk \end{array}\right\} \text{(Verf.)}$$

$$\triangle KLM \backsim \triangle klm \text{ (§. 280)}$$

$$L = l \text{ (§. 18).}$$

(2)

$$\frac{\begin{array}{l} L = l \ (1) \\ \left.\begin{array}{l} LB = lb \\ LC = lc \end{array}\right\} \text{(Verf.)} \end{array}}{\frac{\triangle LBC = \triangle lbc \ (\S\ 254)}{\angle CBL = \angle cbl \ (\S.\ 18).}}$$

(3)

$$\frac{\angle CBA + \angle CBL = 2 \llcorner = \angle cab + \angle cbl \ (\S.\ 21)}{\begin{array}{l} \angle CBA + \angle CBL = \angle cba + \angle cbl \ (\S.\ 28) \\ \qquad \angle CBL = \angle cbl \ (2) \end{array}}$$

$$\angle CBA = \angle cba \quad (\S.\ 34)$$

L. Nun die Proportionirtheit der Seiten AB, BC, ab, bc?

S. $\left.\begin{array}{l} AB = ab \\ BC = bc \end{array}\right\}$ (Verf.)

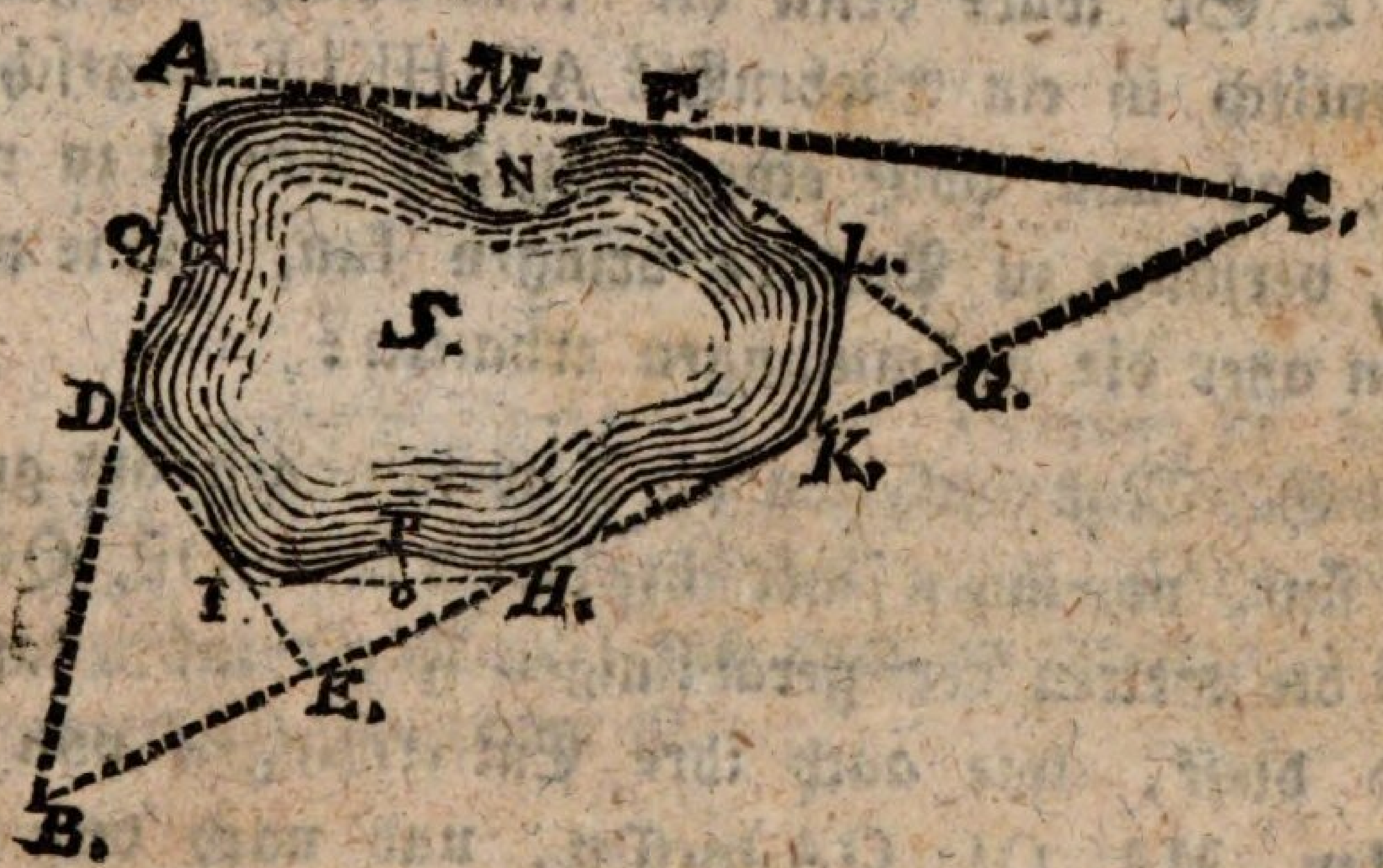
$$AB : ab = BC : bc \ (\S.\ 278).$$

Ein

## Ein und zwanzigster Saz.

### § 299.

L. Nun ergibt sich auch die Aufnahme eines Sees, oder eines von krummen Linien eingeschlossenen GrundStüks.




S. Man muß die krummlinige Figur in ein Dreiek ABC einschliessen, so daß die Seiten desselben möglichst genau anschliessen, oder sie streifen, wenn es seyn kan.

L. Wenn aber die Spitzen des Dreiekks zu weit hervorragen, wie hier B und C?

S. So muß ich sie abschneiden durch genauer anschliessende Linien DE u. FG; und schliessen diese noch nicht genug an, so kan man noch ein Par Linien HI, KL, ziehn, welche die Figur S noch enger einschliessen.

L. So wäre denn die krummlinige Figur S eigentlich in ein SiebenEkk ADIHKLF eingeschlossen, das man, ohne einen einzigen Winkel zu messen, verjüngt zu Papiere bringen kan. Wie wird man aber die Krümmungen erhalten?

S. Man muß, wo die Abweichungen am größten sind, von ihnen senkrechte Linien MN, OP, QR 2c. auf die Seiten der geradlinigen Figur fallen lassen, und diese, wie auch ihre Entfernungen von den Ekken, MA, OI, QA messen, und nach dem verjüngten Maße zu Papiere bringen, die übrigen Krümmungen aber nach dem AugenMaße auftragen.

L. Wie steht es aber um den Beweis?

S. Der lässt sich nur von den geradlinigen Figuren ADIHKLF und adihklf, und den senkrechten Linien MN OP, QR führen: von den Figuren nämlich, daß sie einander ähnlich; von den senkrech-

rechten Linien aber, daß sie nicht nur einander selbst, sondern auch ihre Abstände von den Ekken, einander proportionirt sind. Die Aehnlichkeit der krummen Linien ist eine Folge ihrer Anschmiegung an die geraden, und wird immer genauer und zuverlässiger, je inniger diese Anschmiegung ist.

L. Sehr richtig! Und da der Beweis dem vorigen (§ 298) ähnlich ist, so wollen wir uns nicht dabei aufhalten.

§ 300.

Ich habe wohlbedächtig die Figuren W und S (§ 298, 299) aus Meyers praktischer Geometrie T. II. §. 219, 218 (Fig. LXX und LXIX) gewählt, um sichtbar zu zeigen, daß auch bei ihnen meine VerfahrungsArt anwendbar ist.

§. 301.

Das hier Gelehrte enthält beinahe die ganze Theorie des FeldMessens: so daß dem, welcher es wohl verstanden hat, nicht leicht Schwirigkeiten aufstoßen werden, wo er sich nicht solte zu helfen wissen. Auch wird ihm die Erfahrung noch manche Vorteile an die Hand geben, welche alle zu beschreiben unmöglich ist, und auch nur zum Teil anzugeben der Raum hier nicht gestattet.

Wer aber mehr darüber zu wissen verlangt, kan sich aus Meyers Unterricht zur praktischen Geometrie, Böhms Anleitung zur MeßKunst auf dem Felde, und Andern Rats erholen.

---

# Anfangsgründe

der

# Geometrie.

## Fünftes Buch:

### von Ausmessung der Flächen.

I. Von Ausmessung der geradlinigen Figuren §. 302 — 316.

II. Von Ausmessung des Kreises §. 318 — 347.

## I. Von Ausmessung der geradlinigen Figuren.

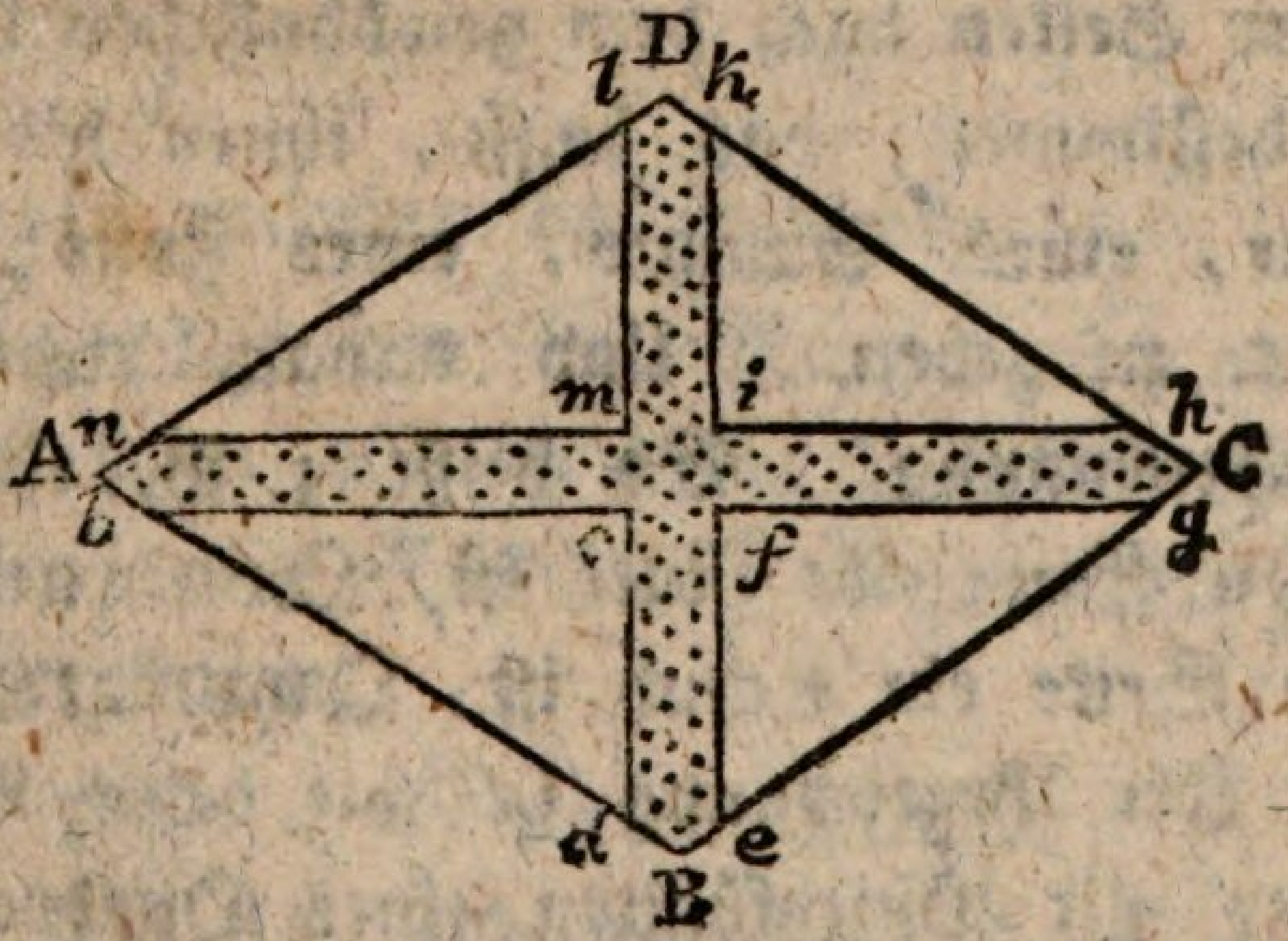
### Erster Satz.

§ 302.

L. Zu Ausmessung der Linien braucht man Linien (§ 273. f.): womit aber werden Flächen gemessen?

S. Ihre Länge und Breite lässt sich auch durch Linien messen.

L. Das ist wahr: aber erhält man durch einen bestimmten Begriff von ihrer Grösse? — Hier




sind zwei Flächen, ABCD und AbcdBefgChikDlmn. Beide haben einerlei Länge AC, und einerlei Breite BD

BD: sind aber beide gleich groß? oder gleichen Inhalts?

S. Nein. ABCD ist größer, als AbcdBe... (§. 44).

L. Wie wird man denn Flächen messen, oder ihren Inhalt finden?

S. Man muß Flächen durch Flächen messen.

L. Das ist recht. Flächen werden durch Flächen gemessen. Welche Figur aber schikt sich zum Masse der Flächen am besten? der Kreis? das DreiEkk? das VierEkk? das Fünfekk? ꝛc.

S. Mir scheint das VierEkk, und unter den VierEkken das Quadrat, am schiklichsten dazu.

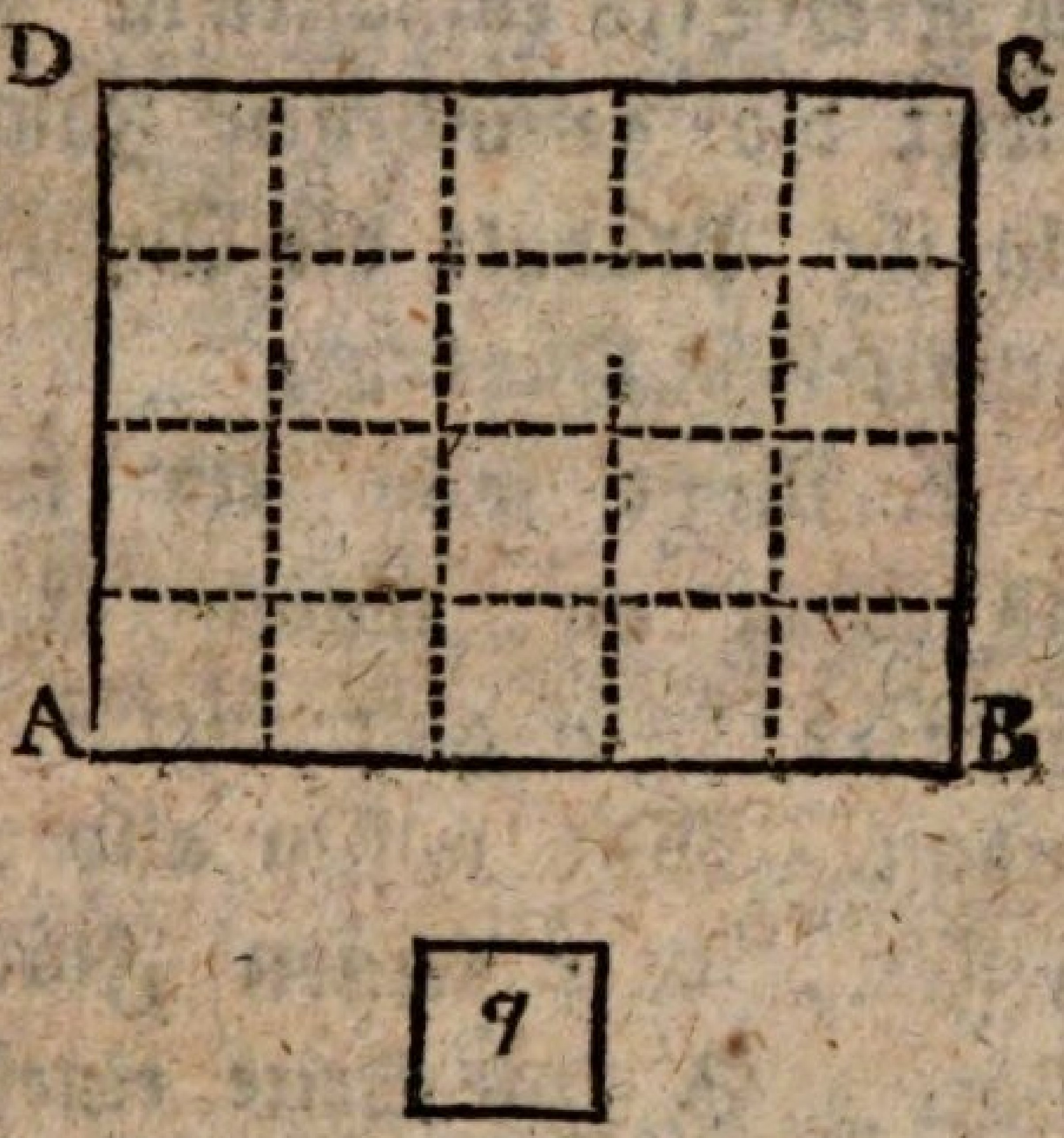
L. Auch richtig. Zu Ausmessung der Flächen ist keine Figur geschikter als das Quadrat. Die Größe der Quadrate, deren man sich zu dieser Messung bedient, ist willkührlich: doch pflegt man die Länge ihrer Seiten nach dem gewöhnlichen Längen-Maße zu bestimmen; das heißt, ihnen die Länge einer Rute, eines Schuhes, eines Zolls, eines Striches ꝛc. zu geben. Und danach richtet sich auch die Benennung. So heißt z. B. ein Quadrat, dessen Seite eine Rute ist, QuadratRute; eins dessen Seite ein Schuh ist, QuadratSchuh, u. s. w. Die Bezeichnung ist wie beim Längen-Maße, nur mit Hinzufügung eines Quadrats am Ende. Z. B. 528 QuadratRuten, 36 QuadratSchuh 45 QuadratZoll, wird geschrieben 528° 36′ 45″ □ oder 528, 36 45″ □

Zwei-

## Zweiter Satz.

§. 303.

L. Hier ist ein RechtEkk ABCD, und ein Quadrat q. Wie oft hat das Quadrat q auf der langen Seite AB des RechtEkks Raum? Oder: wie viel solcher Quadrate wie q können auf AB neben einander stehn?




S. Fünfe.

L. Und auf der kurzen Seite AD?

S. Viere.

L. Und in dem ganzen RechtEkke, wie viele haben da Raum?

S. Zwanzig.

L. Woher kan man das wissen?

S. Auf AB haben fünfe Raum, und auf AD viere. Ich kann also in dem RechtEkk AC vier solche Reihen, oder Schichten, als auf AB stehen, über einander stellen,

$$5 \times 4 = 20 = ABCD.$$

L. Es lässt sich also berechnen, wie oft ein gegebenes Quadrat in einem gegebenen RechtEkke Raum habe. Und wie geschiht das?

S.

S. Man untersucht, wie oft die Seite des Quadrats in zwei an einander stossenden Seiten des RechtEkks enthalten ist § 273. 275) und multiplicirt die gefundenen Zahlen durch einander; so gibt ihr Produkt die Anzahl der in dem RechtEkke enthaltenen Quadrate.

L. Nimt man ein solches Quadrat nun für das Maß an, womit Flächen gemessen werden (§. 302); so gibt dieses Verfahren den FlächenInhalt. Wir wissen also ein RechtEkk auszumessen, oder seinen FlächenInhalt zu finden. Wäre z. B. eine Seite eines RechtEkkes 8 Schuh, und die andere 5 Schuh; so wäre sein FlächenInhalt = = ?

S. 8′ × 5′ = 40′ □

L. Wäre aber das auszumessende RechtEkk ein Quadrat, dessen Seite 8 Ruten wären?

S. So wäre sein Flächeninhalt 8° × 8° = 64° □

## Dritter Saz.

### §. 304.

L. Wir müssen uns mit dem FlächenMaße genauer bekant machen. — Wie lang ist die Seite einer QuadratRute?

S.

S. Eine Rute (§. 302).

L. Und die eines QuadratSchuhes?

S. Einen Schuh.

L. Aber wie viel QuadratSchuh gehn auf eine QuadratRute zehnfüßiges Maß?

S. 10 mal 10, das ist 100 (§. 303).

L. Und zwölffüßiges Maß?

S. 12 mal 12, oder 144.

L. Aber wie viel QuadratZoll enthält ein QuadratSchuh?

S. Zehnfüßiges auch 100, und zwölffüßiges 144.

L. Und so geht es weiter: der QuadratZoll enthält 100 QuadratStrich; der QuadratStrich 100 QuadratSkrupel ꝛc. — Aber wie viel QuadratZoll gehn auf die QuadratRute?

S. 100 mal 100, das ist 1000.

L. Und QuadratStriche?

S. 10000 mal 100, das ist 1000000.

## Vierter Satz.

### § 305.

L. Gesetzt ich hätte 124367 QuadratZoll zwölffüßiges Maß, und wolte wissen, wie viel QuadratRuten und QuadratSchuh darin stäken?

S.

S. Da müſte ich die gegebene Zahl durch 144 dividiren, um QuadratSchuh; und den Quotienten wieder durch 144, um QuadratRuten zu erhalten (§. 304).

124367″ □ = 863′ □ 95″ □
= 5° □ 143′ □ 95″ □

L. Aber angenommen, eben dieſe 124367 QuadratZoll wären zehnteiliges Maß, wie würde ich da die QuadratSchuhe und QuadratRuten herausfinden?

S. Dan müßte ich durch 100, und wieder durch 100 dividiren (§. 304).

124367″ □ = 12 43′ 67″ □.

L. Sihſt du die großen Vorzüge des zehnteiligen Maſſes? Man darf nur von der Rechten nach der Linken die Ziffern parweiſe abteilen; ſo iſt die Diviſion geſchehn (A. §. 53). Z. B. 533456780‴ QuadratStriche zehnteiliges Maß, wie viel würden die Ruten, Schuh und Zoll betragen?

S. 533°, 45′, 67″ 80‴ □

L. Und 2930538940$8^{IV}$ □?

S. 293°, 05′ 38″ 94‴ $08^{VI}$ □

Fünf-

## Fünfter Satz.

### §. 306.

L. So leicht als beim zehnteiligen Maß aus niedrigern Abteilungen die höhern heraus gebracht werden, eben so leichte lassen sich auch höhere in niedrigere verwandeln. Wie viel werden z. B. 52 QuadratRuten, Schuhe betragen?

S. Ich darf der gegebenen Zahl nur zwei Nullen anhängen (A. §. 23. G. §. 304) 52° □ = 5200′ □

L. Und QuadratZoll würden eben diese 52 QuadratRuten betragen = =?

S. 52° □ = 520000″ □

L. Und eben diese 52 QuadratRuten würden im zwölfteiligem Maße betragen? = =

S. 52° □ = (52 × 12)′ □ = 7488′ □ = (7488 × 12)″ □ = 1078272′ □

L. Auch hier sind die Vorzüge des zehnteiligen Maßes auffallend, und daher wollen wir uns künftig stets desselben bedienen.

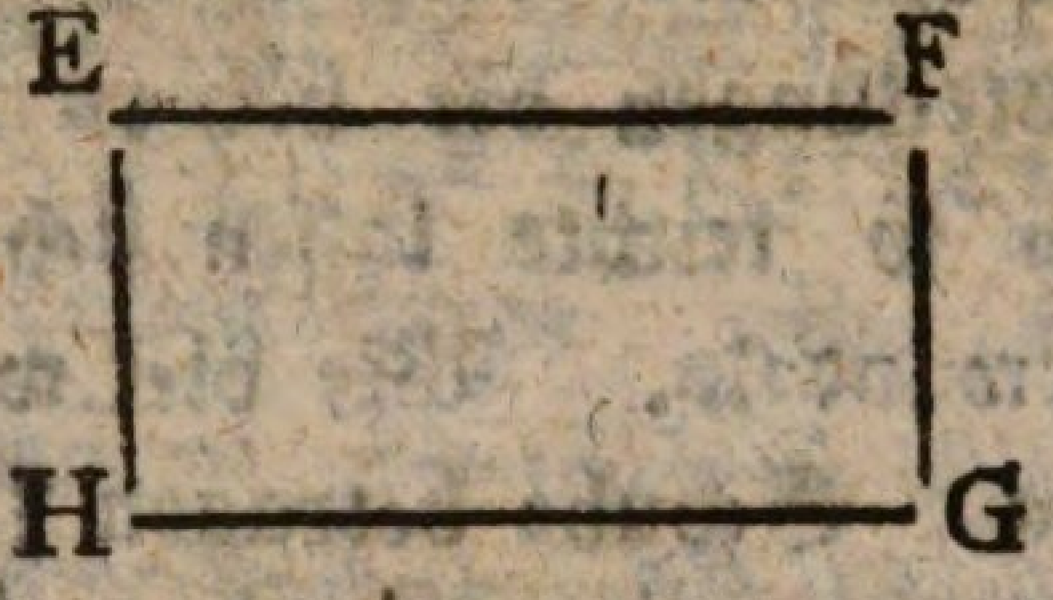
## Sechster Satz.

### §. 307.

L. Vorhin (§. 303) haben wir RechtEkke ausgerechnet, deren Seiten sich durch einerlei Maß-

Teile

Teile ausmessen ließen: gesetzt aber eines RechtEkks EFGH eine Seite EF wäre 2 Ruten, und die andere EH 8 Schuh lang, was für ein Product würde das geben?




S. Man kan ja vor der Ausrechnung beide Faktoren auf einerlei MaßTeile bringen; hier z. B. die 2 Ruten in 20 Schuh verwandeln; so erhält man:

$$20' \times 8' = 160' \square = 1,60' \square$$

L. Ganz recht! Gesetzt aber eine Seite eines RechtEkks wäre 7° 2', und eine andere 3,24''?

S. Da wäre sein Flächeninhalt 720'' × 324'' = 23,3280'' □

L. Und Seiten von 72' und 3,246''', welchen FlächenInhalt geben die?

S. 7,2' × 3,246 = 7,200''' × 3,246''' = 23°, 37' 12'' 00''' □ = 23, 37' 12'' □

L. Jetzt erst wissen wir jedes RechtEkk auszumessen: nur könte man noch einwenden, daß vielleicht der Fall möglich sei, daß man mit keiner Abteilung des gegebenen Masses das Ende einer der Seiten genau erreichte.

S. So

S. So könte man sich ihm doch, durch Annehmung immer kleinerer MaßTeile, so sehr nähernals man wolte.

L. Das ist richtig. Kan man die Wahrheit nicht ganz erreichen, so kann man ihr doch so nahe kommen als man wil.

## § 308.

L. Es ist vielleicht nicht unnütz, die UebereinStimmung dieser Rechnung mit der DecimalRechnung zu zeigen. — Wie würde das lezte Exempel, $72' \times 3246''$, nach A. § 204. aussehen?

S. $72\text{-}' \times 3246\text{-}''' = 23{,}3712\text{-}^{IV} = 23^{\circ}37'12''$ □

L. Und das vorletzte: $72' \times 324''$?

S. $72\text{-}' \times 324\text{-}'' = 23328\ '''$.

L. Und wenn man diesen zehnteiligen Brüchen Nenner gäbe, wie würden sie aussehen?

S. $23 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$ (A. § 195).

L. Aber TausendTeile des Ganzen finden bei dem FlächenMasse nicht Stat, sondern nur HundertTeile, ZehntausendTeile, MillionTeile (§ 304). Man ist also genöthigt, die $\frac{8}{1000}$ in 10000Teile zu verwandeln. Wie werden sie dan aussehen?

S. $\frac{8}{1000} = \frac{80}{10000}$ (A. § 64).

L. Aus diesem Exempel erhellt, daß man, in dem Fall da die OrdnungsZiffer ungerade ist, dem Produkte eine Null anhängen, seine OrdnungsZahl um 1 vermehren, und dan halben muß. — Wie wird, dem zufolge, obiges Product aussehn?

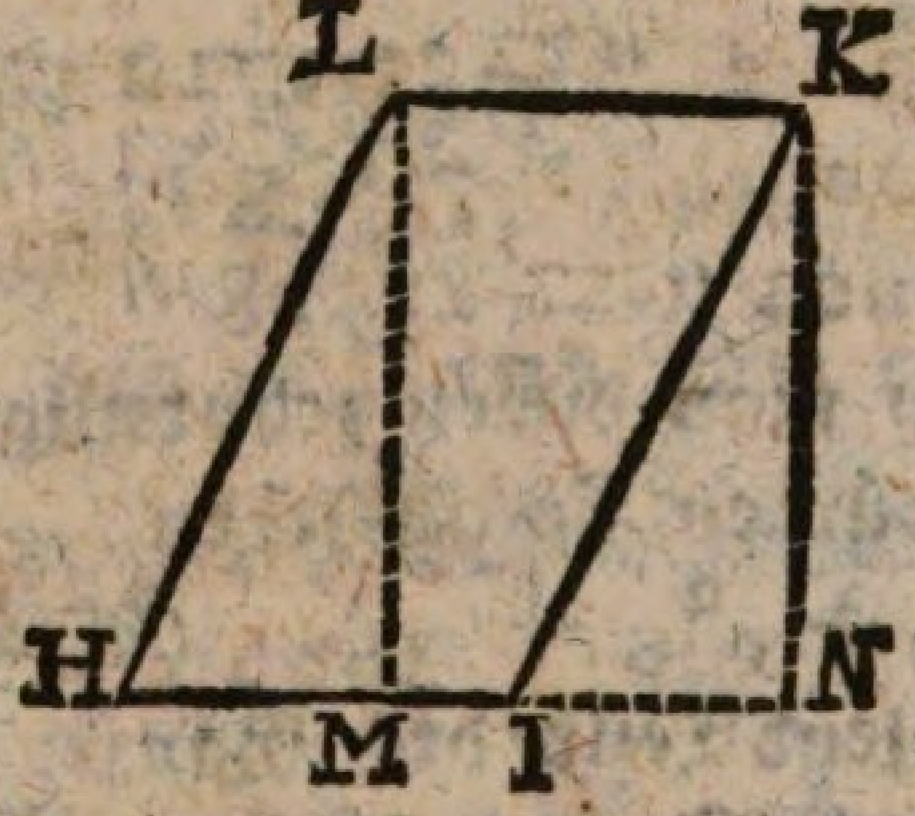
S. $23{,}32800\text{-}^{IV} = 23{,}\ 32'\ 80''$ □

L. Das ist recht. Obgleich dieses Verfahren kürzer ist; so ist doch das vorige (§ 307.) in der Ausübung vorzuziehen, weil weniger dabei zu bedenken, und man der Gefahr zu irren weniger unterworfen ist.

## Siebenter Satz.

### § 309.

L. Wir wissen also ein RechtEkk auszurechnen: wie wird aber der FlächenInhalt eines schiefen Parallogramms, oder einer Raute HIKL gefunden?




S. Ich darf nur die Grundlinie HI durch die Höhe LM multipliciren; so erhalte ich den Inhalt eines RechtEkks LMNK (§ 303) das eben so groß ist als die Raute HIKL (§ 143).

L. Es sei die Grundlinie HI = 7,5′
die Höhe LM = 11°,

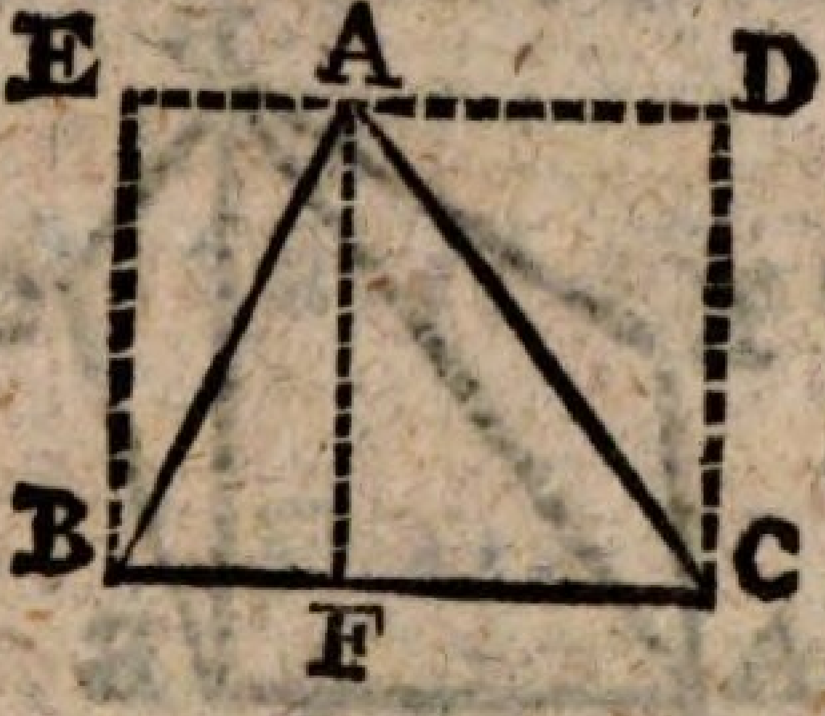
S. So wäre □ LMNK = 7,5′ × 11°
= 82,50′□ = ▭ HIKL.

Achter

## Achter Satz.

§ 310.

L. Wie verhält sich ein DreiEkk ABC, zu einem Parallelogramm BCDE, das mit ihm einerlei Grundlinie BC, und einerlei Höhe AF hat?




S. Es ist die Hälfte von ihm (§ 154).

L. Wie wird also der FlächenInhalt des DreiEkks ABC gefunden?

S. $\triangle ABC = \frac{BC \times AF}{2} = \frac{1}{2} BC \times AF = BC \times \frac{1}{2} AF$. Man multiplicirt die GrundLinie durch die Höhe, und halbt das Product. Oder man multiplicirt die halbe GrundLinie durch die ganze Höhe; oder auch die ganze GrundLinie durch die halbe Höhe.

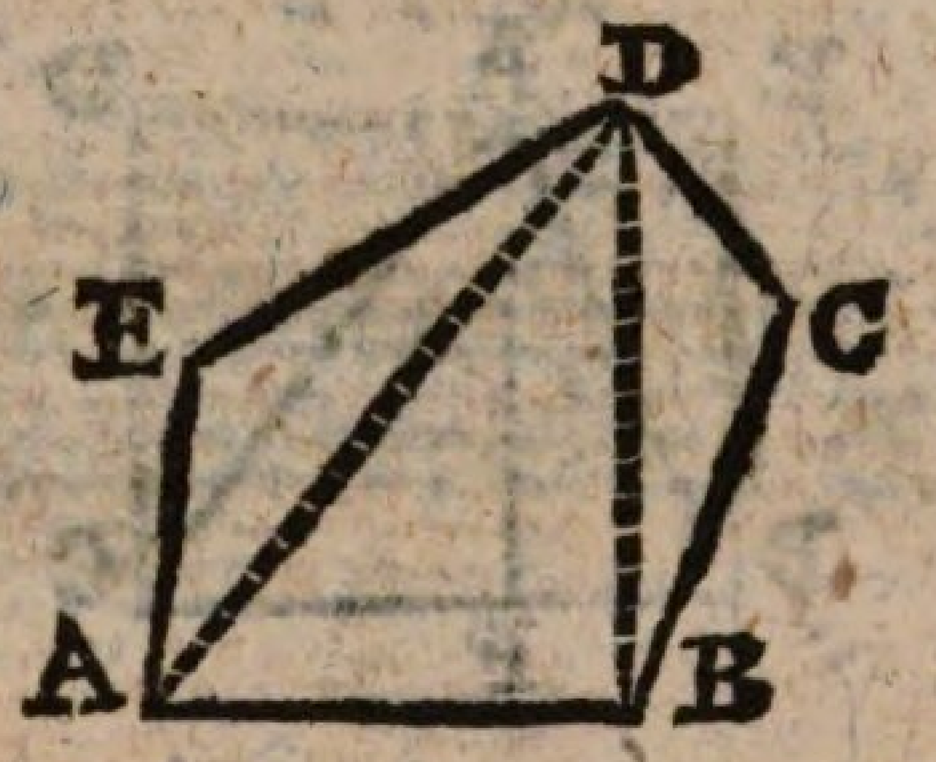
L. Es sei $BC = 11,6$
$AF = 9,2$

S. So ist $\triangle ABC = \frac{11,6 \times 9,2}{2} = 5,8 \times 9,2 = 53,39'\square$.

## Neunter Satz.

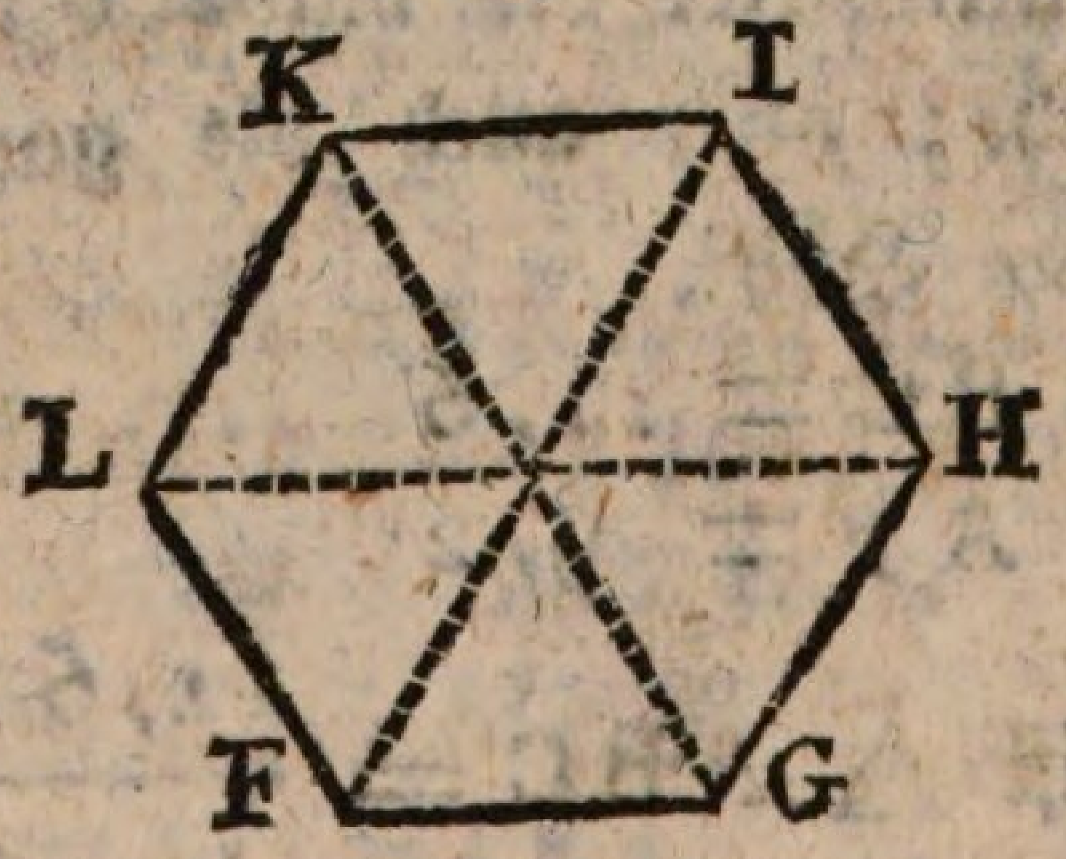
### § 311.

L. Hieraus ergibt sich die Ausmessung der VielEkke. Wie wird der FlächenInhalt des unregelmäßigen FünfEkks ABCDE gefunden?




S. Man muß es durch EkLinien AD, BD, in DreiEkke zerteilen, und jedes DreiEkk nach § 310 ausmessen; so gibt ihre Summe den FlächenInhalt des VielEkks ABCDE.

L. Ist das VielEkk ordentlich, wie das SechsEkk FGHIKL; so kan man sich die Arbeit sehr verkürzen. Und wie?



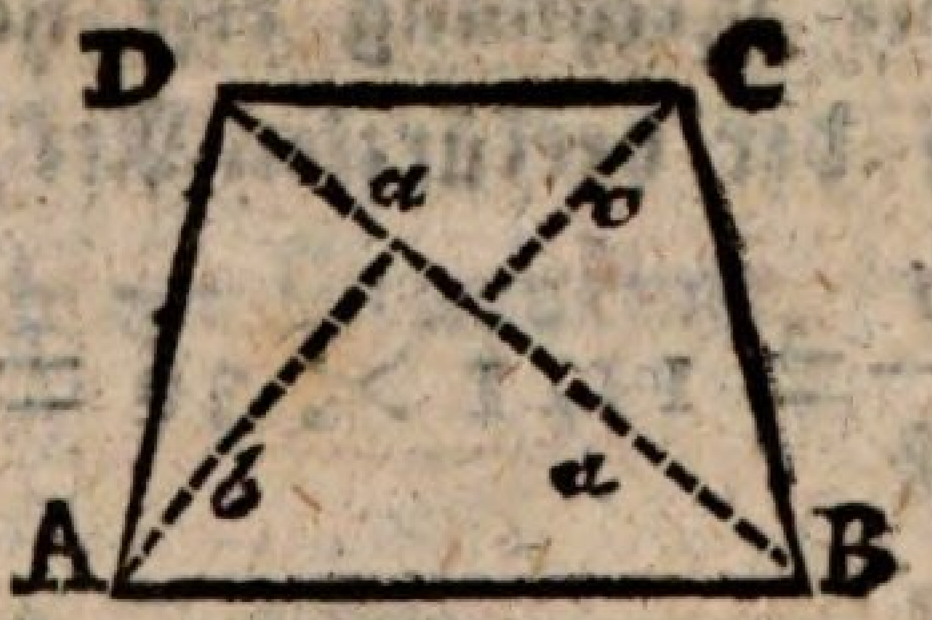

S. Man

S. Man zieht vom Mittelpunkte des VielEkks, nach allen Ekken desselben, gerade Linien; so entstehn so viel gleiche und ähnliche DreiEkke als das VielEkk Seiten hat (§ 230). Ich brauche also nur eins dieser DreiEkke auszumessen, um die Größe aller übrigen zu wissen, deren Summe den FlächenInhalt des VielEkks ausmacht.

## Zehnter Saz.

### § 312.

L. Wie wird der FlächenInhalt eines Trapezii ABCD gefunden?




Da es sich durch eine EkLinie in zwei DreiEkke zerteilen lässt; so lässt sich sein Inhalt wie der eines VielEkks, (§ 311) berechnen.

L. Das ist zwar richtig: es läßt sich aber eine Abkürzung anbringen, mit der wir uns bekant machen wollen, weil sie auch bei unordentlichen VielEkken Anwendung findet. Mehrer Bequem-

lichkeit wegen wollen wir die EkLinie a, die aus den gegenüberstehenden Ekken darauf fallenden senkrechten Linien aber b und c nennen. Welches ist nun, nach dieser Bezeichnung, der FlächenInhalt des Trapezii ABCD?

S. $ABCD = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2}$ (§ 310).

L. $\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} = (\frac{b}{2} + \frac{c}{2})\,a$

In dieser lezten Formel liegt die Abkürzung.

Es sei $a = 11{,}1$
$b = 7{,}2$
$c = 4{,}6.$

Um den Vorteil der Abkürzung deutlicher einzusehen, wollen wir die Rechnung erst nach gewöhnlicher, und dan nach der verkürzten Art, anstellen.

S. I) $a\frac{b}{2} = 11{,}1 \times 36 = 39{,}96.$

$a\frac{c}{2} = 11{,}1 \times 23 = 25{,}53$

$ABCD = 65{,}49'\square$

II) $(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)\,a = (3{,}6 + 2{,}3) \times 11{,}1$
$= 5{,}9 \times 11{,}1 = 65{,}49'\square$

## Elfter Satz.

### § 313.

L. Es sei die GrundLinie eines Parallogramms = b, und seine Höhe = a; welches ist dan sein FlächenInhalt?

S. $b \times a = ba$ (§ 303).

L. Das heißt: .?

S. Der FlächenInhalt eines Parallelogramms ist ein Produkt aus seiner Höhe und seiner GrundLinie.

L. Wenn also der FlächenInhalt und die Höhe gegeben ist, lässt sich dan wol die Grundlinie finden?

S. Ja: durch Division des ersten durch die lezte (A. § 39.)

$$\frac{ab}{a} = b = \text{GrundLinie.}$$

$$\text{und } \frac{ab}{b} = a = \text{Höhe.}$$

L. Das heisst? —

S. Die Höhe eines Parallelogramms wird gefunden durch Division seines FlächenInhalts mit der GrundLinie; und die GrundLinie wird gefunden durch Division des FlächenInhalts mit der Höhe.

L. Es sei $ab = 82,50' \square$
$b = 7,5' = 11^\circ$.

## Zwölfter Satz.

### § 314.

L. Es sei, wie vorhin, die GrundLinie eines DreiEkks $= b$, seine Höhe $= a$; welches ist dan sein FlächenInhalt $= t$?

S. $t = \frac{1}{2}\, ab = \frac{ab}{2}$ (§ 310).

L. Wie wird nun aus dem gegebenen FlächenInhalte $t = ab$ die Höhe a gefunden?

S. $\frac{ab}{2} = t$

$$ab = 2t$$

$$a = \frac{2t}{b} = \frac{t}{\frac{1}{2}b}$$

L. Und die GrundLinie b, wie wird die gefunden?

S. $\frac{ba}{2} = t$

$$ba = 2t$$

$$b = \frac{2t}{a} = \frac{t}{\frac{1}{2}a}$$

L. Das

L. Das heisst..?

S. Die Höhe eines DreiEkks wird gefunden, durch Division seines FlächenInhalts mit der halben GrundLinie; und die GrundLinie wird gefunden durch Division des FlächenInhalts mit der halben Höhe.

L. Es sei t = 53,36′ □

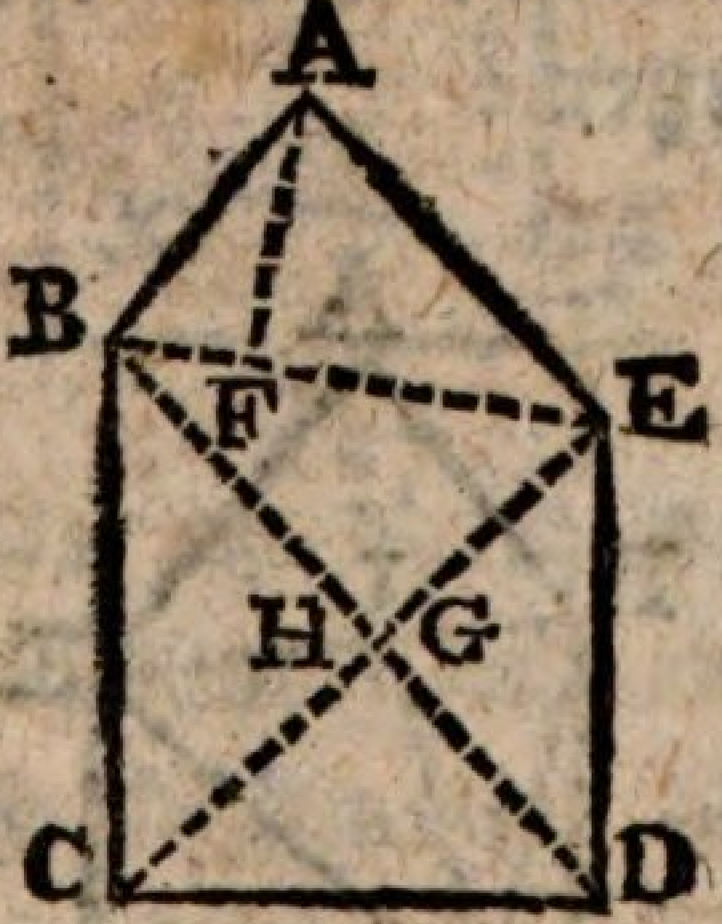
b = 11,6

S. So ist a = 53,36′ : 5,8 = 9,2.

## Dreizehnter Saz.

### § 315.

L. Es wird verlangt ein unordentliches VielEkk ABCDE in zwei gleiche Teile zu teilen. Wie werden wir das bewerkstelligen? Was wird zunächst zu tun seyn?




S. Zuerst muß ich den FlächenInhalt von ABCDE ausrechnen; diesen durch 2 dividiren;

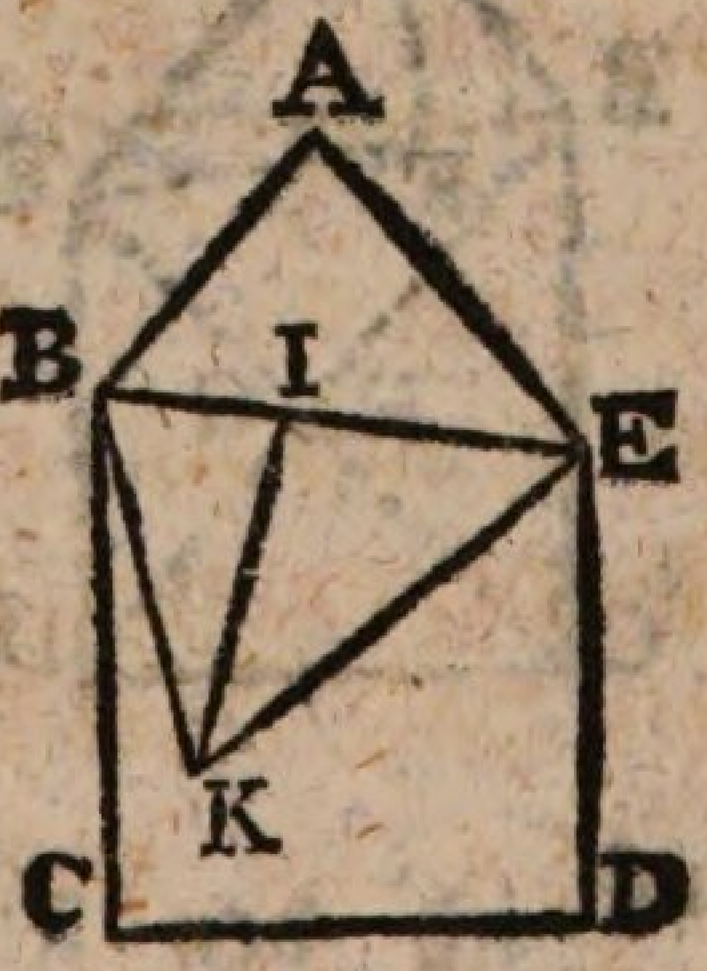
 dan

dan untersuchen, um wie viel das DreiEkk ABC grösser oder kleiner ist als der halbe FlächenInhalt von ABCDE.

L. Genug fürs Erste! Wir wollen nun zur Ausführung schreiten.

S. I) BE = 9,9
$\frac{1}{2}$ Höhe AF = $\frac{5,8}{2}$ = 2,9
△ ABE = 28,71′ □
II) EkkLinie CE = 12,1
$\frac{1}{2}$ Höhe BG + DH = 7,1
Trap. BCDE = 93,01′ □
△ ABE = 28,71
VielEkk ABCDE = 121,72′ □
$\frac{1}{2}$ ABCDE = 60,86
$\frac{1}{2}$ ABCDE — ABE = 32,15

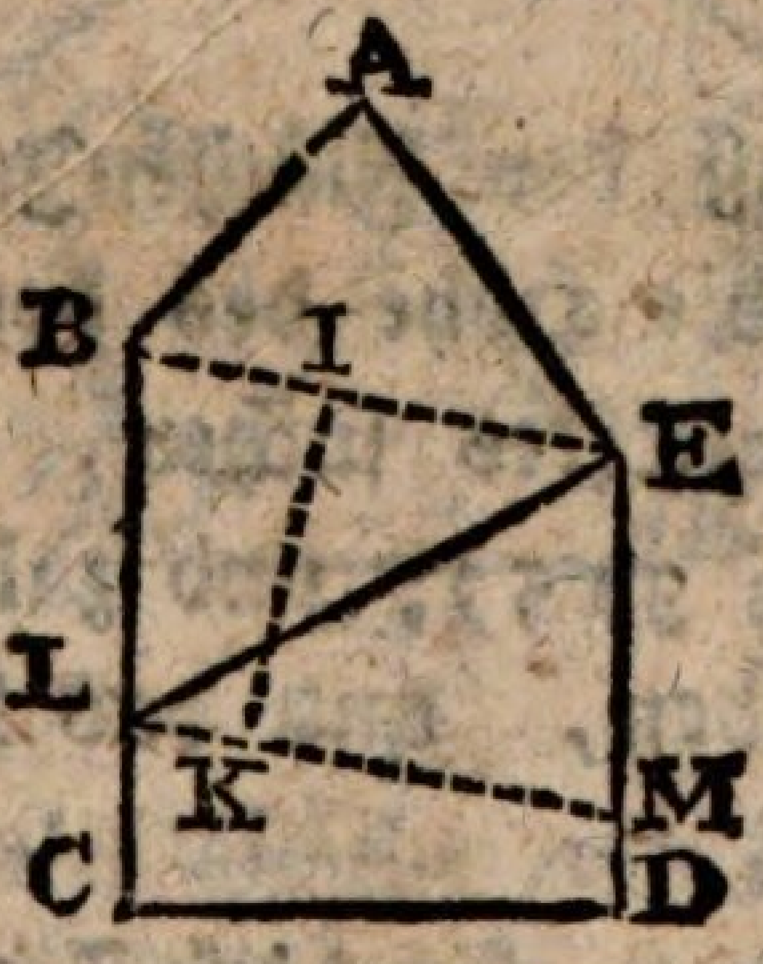
L. So viel also fehlt dem DreiEkk ABE, um die Hälfte von ABCDE zu seyn. Wie werden wir ihm das ansetzen?




S. Es

S. Es muß an ABE ein DreiEkk angesetzt werden, dessen FlächenInhalt = 32, 15′ □, und dessen Grundlinie BE = 9, 9′; es kommt also zuerst darauf an, seine Höhe zu finden. Diese ist 32, 15 : $\frac{22}{2}$ = 6, 49 ... Von dieser Länge errichte ich auf BE eine senkrechte Linie IK und ziehe die Linien BK, EH; so erhalte ich ein DreiEkk BEK von der verlangten Grösse, und ABKE = $\frac{1}{2}$ ABCDE

L. Alles ganz richtig! Wenn aber noch verlangt würde, eine Seite des DreiEkks solle mit einer des gegebenen VielEkks, entweder BC oder ED zusammen treffen?




S. Dan müßte ich durch den EndPunkt K der senkrechten Linie IK mit BE eine gleichlaufende Linie LM ziehn; so bestimmten die DurchschnittsPunkte L und M die Höhe eines DreiEkks von der verlangten Grösse (§ 148) und Beschaffenheit. Ziehe ich nun EL, so ist ABLE = $\frac{1}{2}$ ABCDE.

L. Jezt

L. Jetzt sind alle Schwierigkeiten gehoben. Die Linie LM heisst der geometrische Ort (locus geometricus), in welchem die Spitzen aller DreiEkke liegen, welche die gegebene GrundLinie und den gegebenen Inhalt haben.

## § 316.

L. Wer eine geradlinige Figur in zwei gleiche Teile zu teilen versteht, der wird sie auch in drei, vier, und überhaupt so viel gleiche Teile zu teilen wissen, als verlangt wird. Wie würde man z. B. vorige Figur in drei gleiche Teile zerschneiden?

S. Man muß den FlächenInhalt durch 3 dividiren; hierauf die Höhe des dem DreiEkke ABC anzusetzenden DreiEkkes suchen, übrigens verfahren wie vorhin (§ 315); und zulezt den Ueberrest noch einmal halben, und das Verfahren § 315 wiederholen.

L. Und solte man eben diese Figur in vier gleiche Teile zerschneiden?

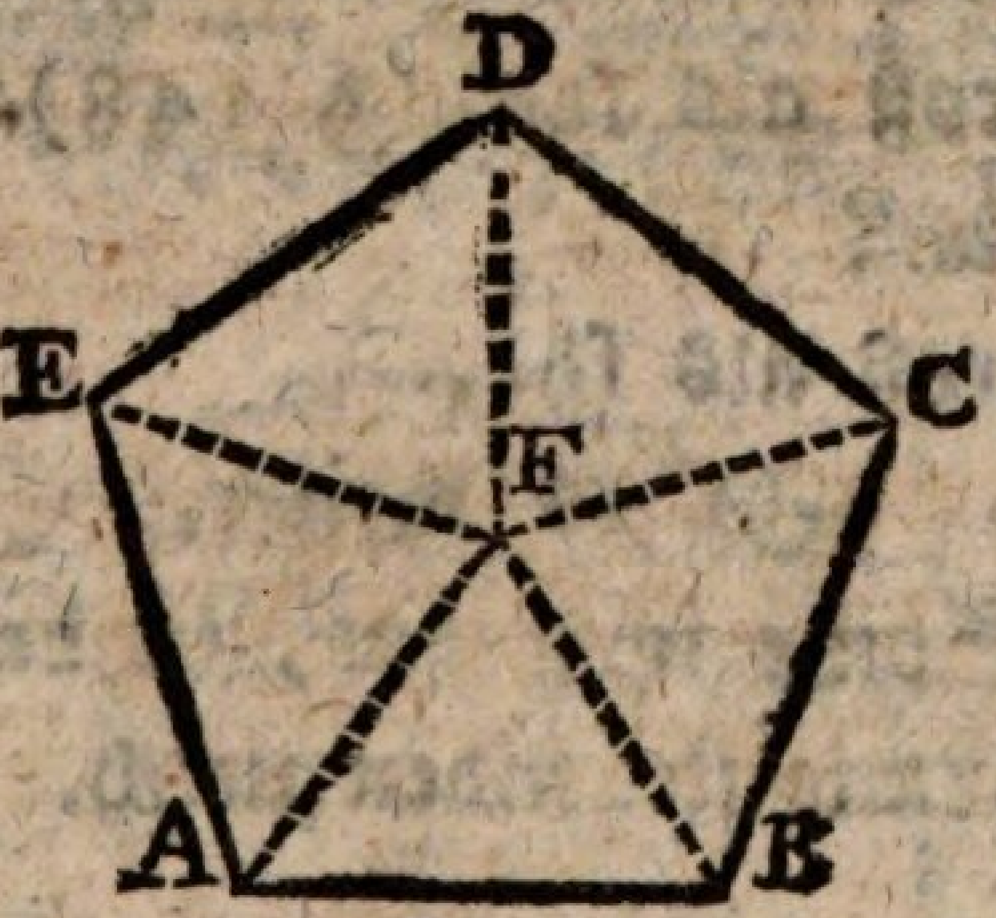
S. So könte man sie erst in zwei Hälften zerteilen (§ 315), und jede Hälfte wieder in zwei Hälften.

§ 317.

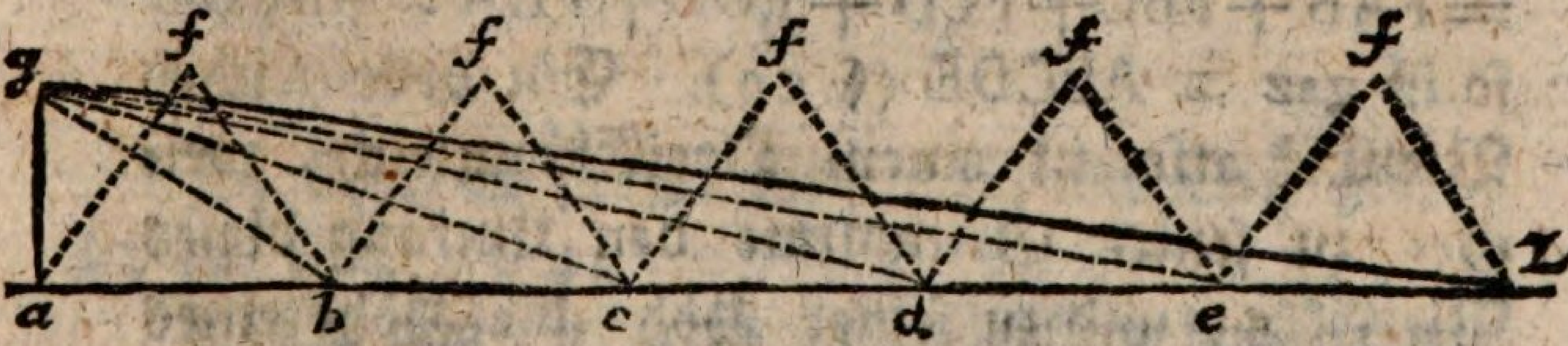
## Nachtrag.

(Hinter § 230. einzuschalten.)

L. Es wird ein ordentliches FünfEkk, ABCDE gezeichnet (§ 227. 236). In demselben werden aus dem MittelPunkte F nach allen Ekken gerade Linien gezogen. Wie teilen diese Linien das VierEkk?




S. In so viel gleiche und ähnliche DreiEkke als es Seiten hat (§ 230)




L. Es

L. Es wird eine gerade Linie von unbestimmter Länge gezogen. Auf diese werden die Seiten des FünfEkks getragen von a nach b, von b, nach c, von c nach d, von d nach e, und von e nach f. Auf jeder dieser Seiten wird ein DreiEkk gezeichnet, gleich und ähnlich dem DreiEkk FAB, FBC, in welche das FünfEkk zerschnitten ist (§ 87). Ueber a wird eine gerade Linie ag senkrecht errichtet, gleich der Höhe dieser DreiEkke, und von ihrem EndPunkte g werden nach allen Abteilungen b, c, d, e, z gerade Linien gezogen. — Wie groß ist nun das DreiEkk agb?

S. So groß als fab (§ 148).

L. Und gbc?

S. So groß als fbc.

L. Und so geht es weiter. Jedes DreiEkk, welches seine Spitze in g hat, ist dem mit ihm auf einerlei GrundLinie stehenden gleich. Und das grosse DreiEkk gaz?

S. $\triangle$ gaz = $\triangle$ fab + fbc + fcd + fde + fez.

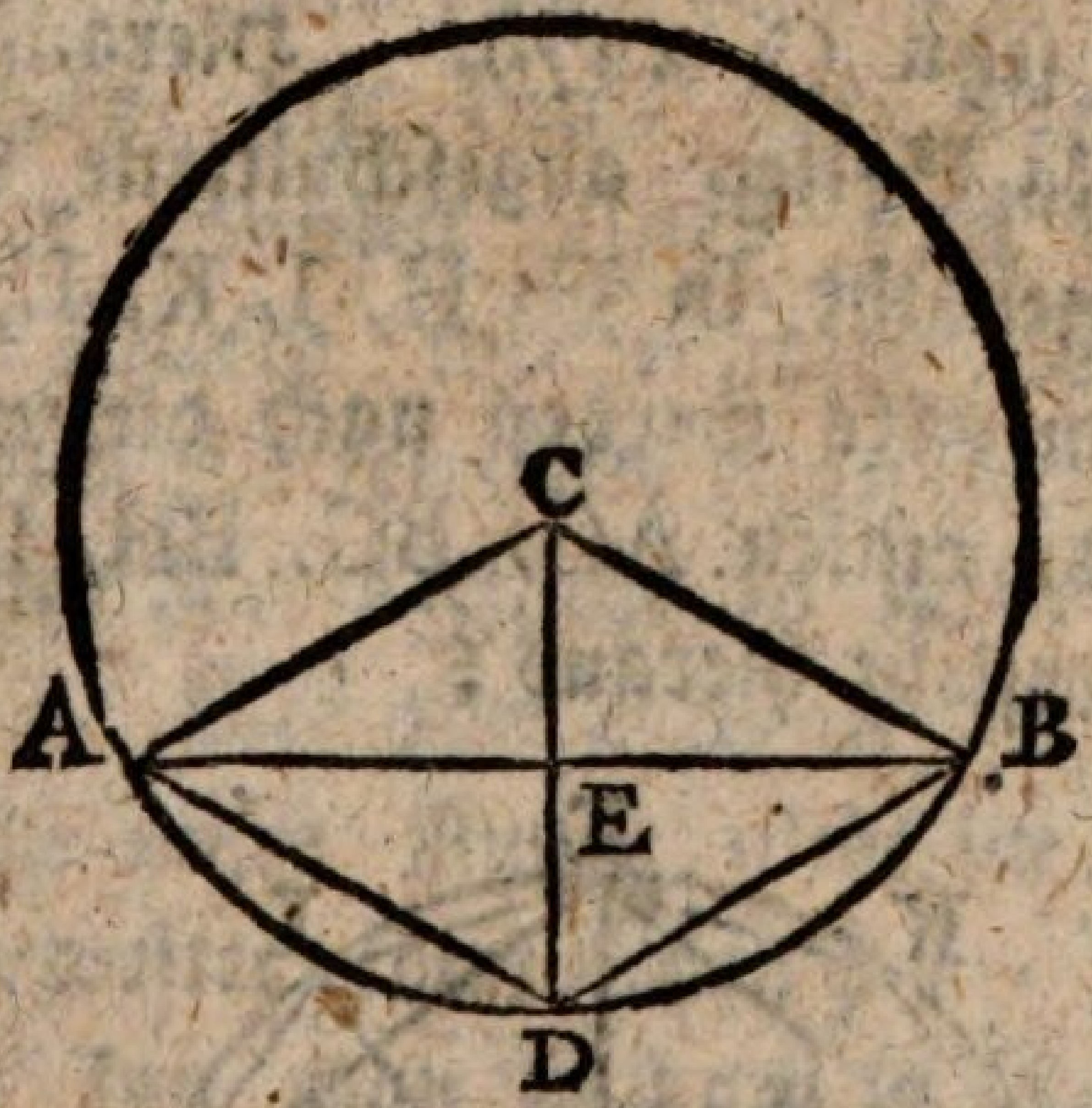
L. Da nun fab + fbc + fcd + fde + fez = FAB + FBC + FCD + FDE + FEA = ABCDE' so ist gaz = ABCDE (§ 29). Ein ordentliches VielEkk also ist einem DreiEkke gleich, welches zu seiner Grundlinie den Umfang dieses VielEkks, und zu seiner Höhe die Höhe eines der DreiEkke hat, in welche das VielEkk aus dem MittelPunkte zerschnitten ist. II.

## II. Von Ausmessung des Kreises.

### Vierzehnter Satz.

§ 318.

L. Aus einem beliebigen MittelPunkte C wird mit willkührlichem Halbmesser ein Kreis gezeichnet. In diesem Kreise wird eine Sehne AB nach Willkühr gezogen. Der durch dieselbe abgeschnittene Bogen AB wird gehalbt in D. Es werden die Sehnen AB, BD, und die Halbmesser CA, CB und CED gezogen. — Welches DreiEkk ist nun grösser? CAE; oder CAD? CBE, oder CBD?




S. CAD ist grösser als CAE, und CBD grösser als CBD (§ 44).

L. Da nun Grösseres zum Grössern hinzugetan grösser ist, als Kleineres zum Kleinern; so ist CAD

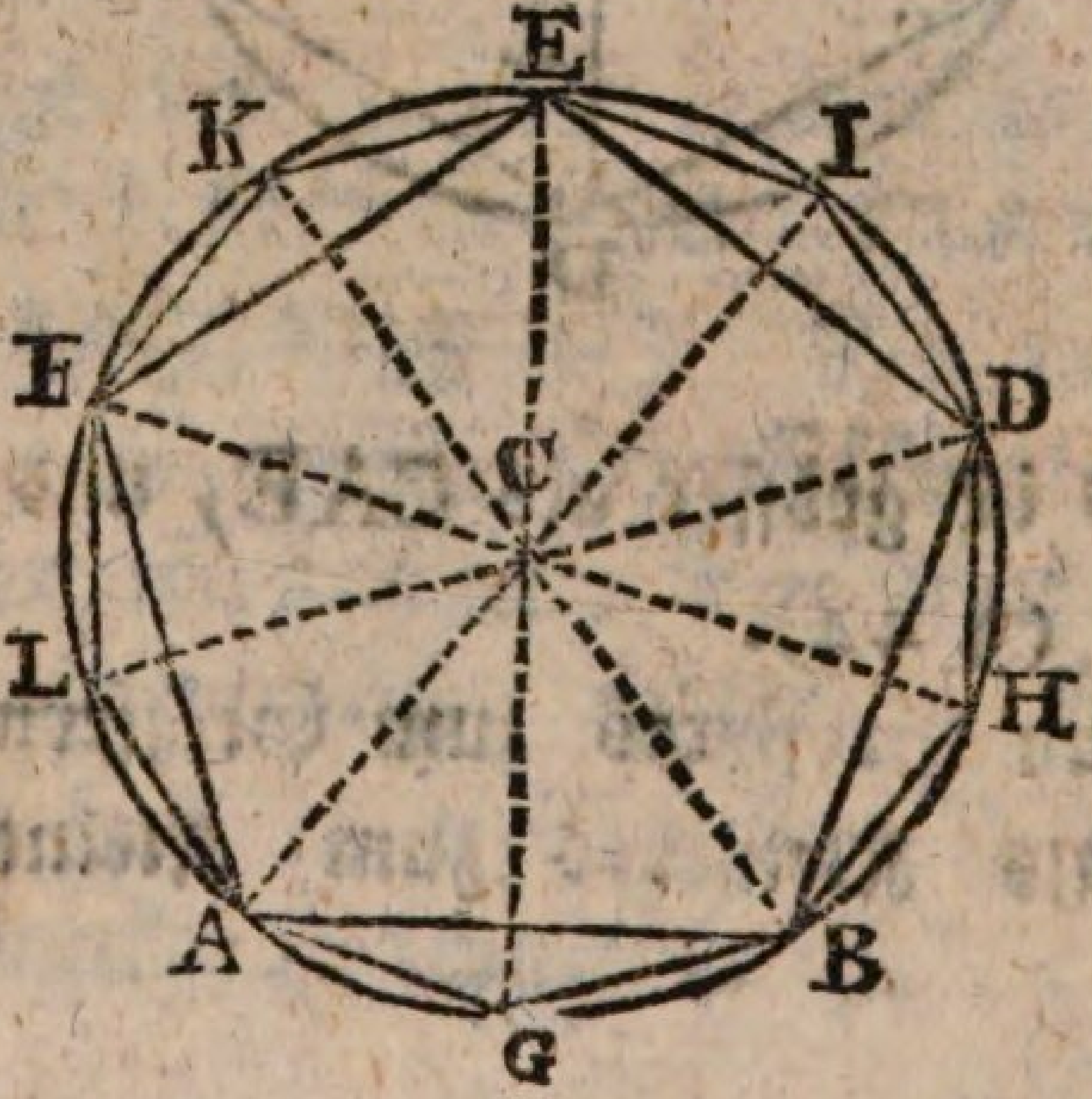
CAD + CBD > CAE + CBE; oder:
CAD + CBD > CAB

Das giebt einem Lehrsatz. Wie lautet er?

S. Die DreiEkke, welche die beiden Sehnen der halben Bogen mit dem HalbMesser bilden, begreifen einen grössern Raum der KreisFläche, als der, welchen die Sehne des ganzen Bogens mit dem Halbmesser macht.

## § 319.

L. Es wird ein Kreis beschrieben wie vorhin. In demselben wird ein ordentliches VielEkk gezeichnet: der Bequemlichkeit wegen kan es ein FünfEkk ABDEF seyn (§ 227). Hierauf wird jeder durch VielEkks-Seiten abgeschnittene Bogen AB, BD, DE ꝛc. gehalbt in G, H, I, K, L. Von den Ekken des FünfEkks werden nach diesen Halbungs-Punkten gerade Linien AG, BG, BH, DH ꝛc. gezogen. Was entsteht hieraus?




S. Ein

S. Ein ZehnEkk.

L. Also ein VielEkk von doppelt so viel Seiten als das vorige. Welches von beiden kömt nun dem Inhalte der KreisFläche am nächsten? Das FünfEkk, oder das ZehnEkk?

S. Das ZehnEkk.

L. Wie lässt sich das beweisen?

S. Wenn ich die Halbmesser CA, CG, CB, CH ꝛc. ziehe; so füllen die DreiEkke CAG, CBG einen grössern Raum der KreisFläche, als das DreiEkk CAB (§ 318). Ein Gleiches gilt von den übrigen DreiEkken, in welchen das FünfEkk und das ZehnEkk zerschnitten sind.

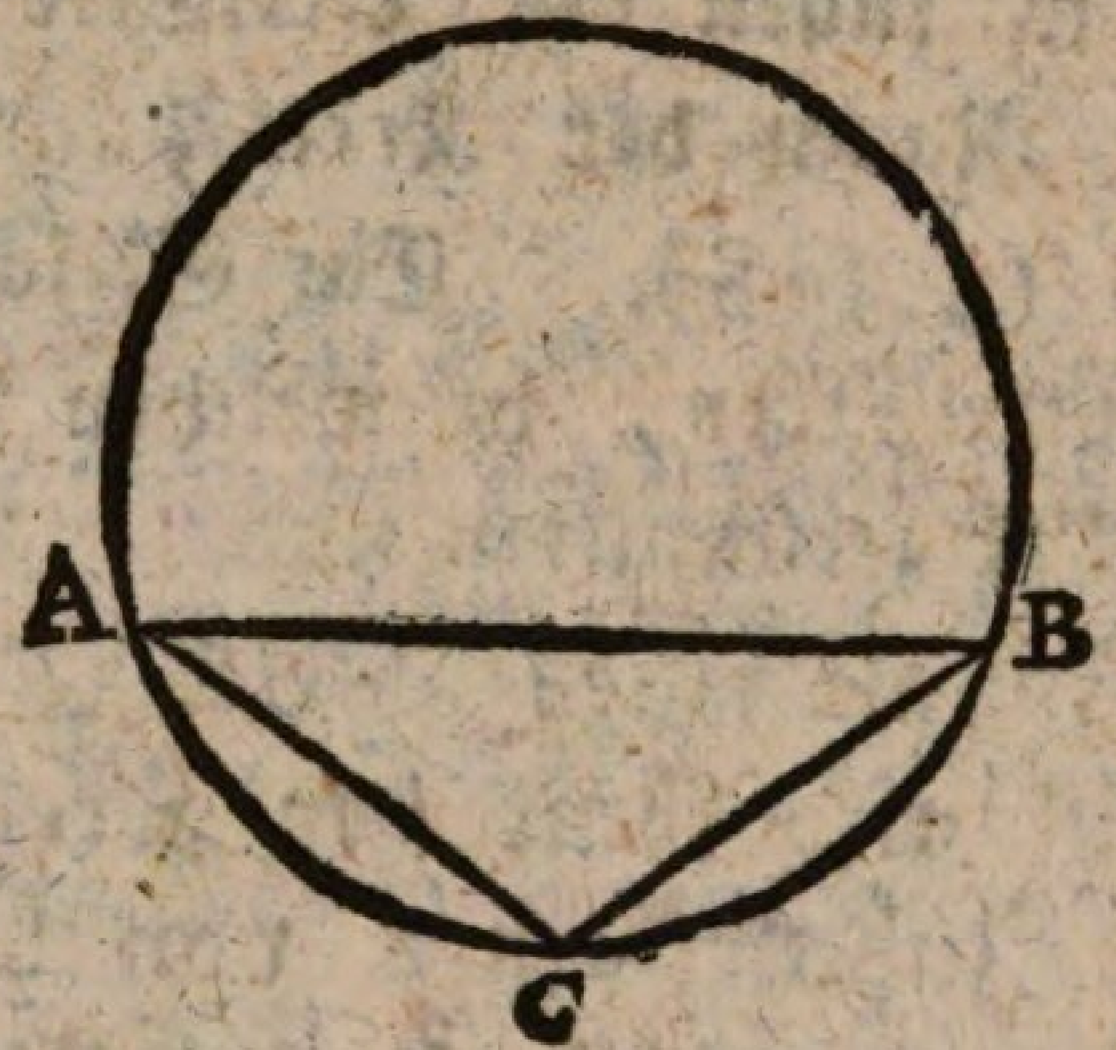
L. Der Inhalt eines VielEkks von doppelter Seitenzahl also kömt der KreisFläche nähet als der Inhalt eines von halb so viel Seiten. Durch wiederholte Verdoppelung der VielEkks-Seiten kan man den Inhalt des VielEkks der KreisFläche so nahe bringen als man wil. — Wie aber, wenn die Teile so klein werden, daß unsre Augen nicht im Stande sind, die Teilung weiter fortzusetzen?

S. So kan man sie doch in Gedanken, oder durch Rechnung fortsetzen.

## Funfzehnter Satz.

### § 320.

L. Wir zeichnen wieder einen Kreis, und in demselben eine Sehne AB, beides nach Willkühr. — Was ist nun länger? Die Sehne AB, oder ihr Bogen?



S. Der Bogen ist länger als seine Sehne (§ 7).

L. Wir wollen den Bogen AB halben in C, und die Sehnen AC, BC ziehen. Welches ist nun grösser? AB? oder AC + BC?

S. AC + BC > AB (§ 84).

L. Welches aber ist länger? Der Bogen ACB? oder die Sehnen AC + BC seiner beiden Hälften?

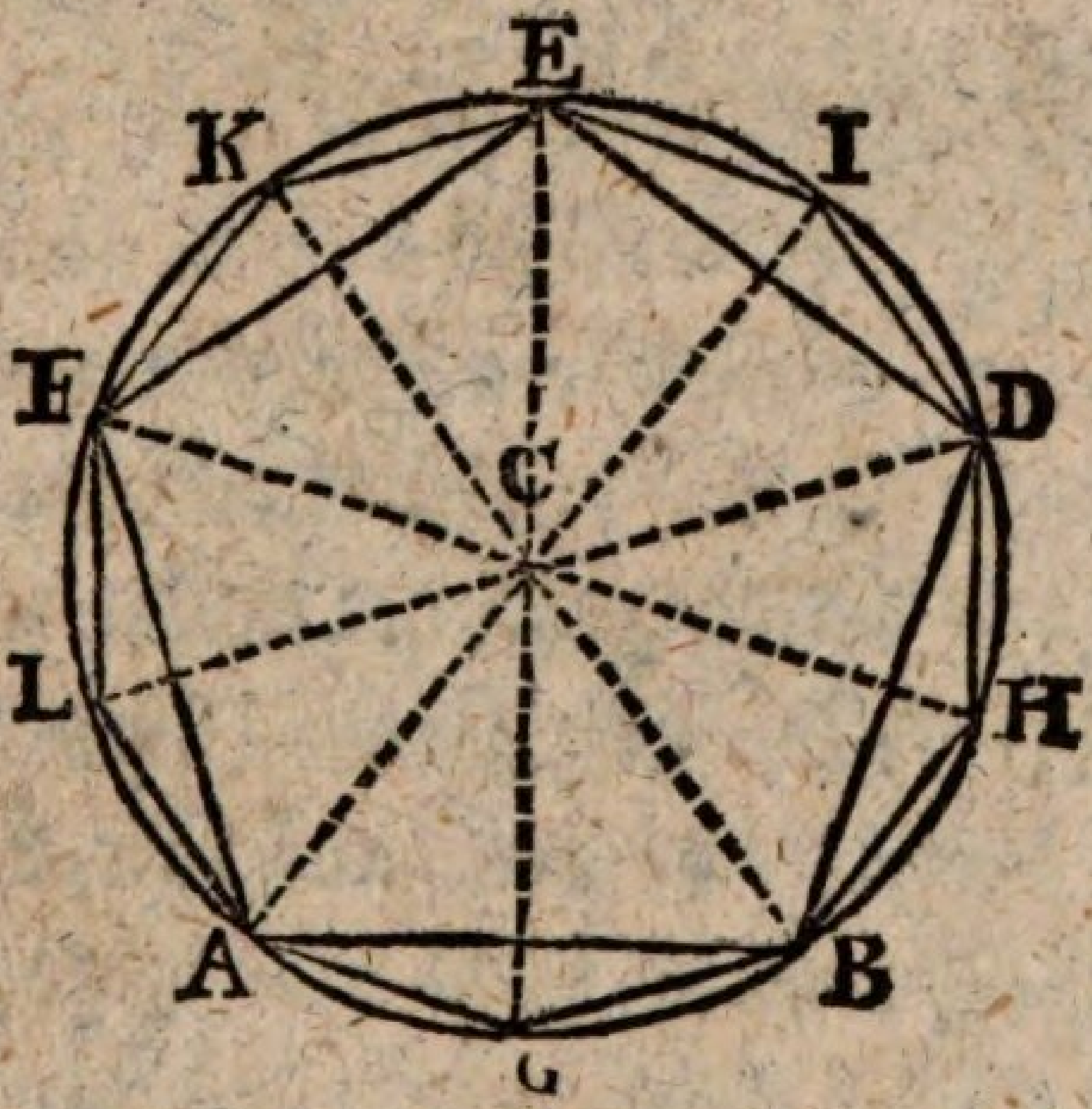
S. Bogen AC > Sehne AC } (§ 7).
Bogen BC > Sehne BC }

Bogen AC + BC > Sehne AC + BC oder
Bogen ACB > Sehne AC + BC.

L. Der

L. Der ganze Bogen ACB also ist grösser als die Sehnen seiner beiden Hälften AC + BC; und diese Sehnen sind wieder grösser als die Sehne AB des ganzen Bogens. Was kömt nun der Ausdehnung des Bogens ACB näher? Die Sehne des ganzen Bogens? oder die Summe der Sehnen AC + BC, seiner beiden Hälften?

Die Summe der Sehnen der Hälften des Bogens kommen seiner Länge näher, als die Sehne des ganzen Bogens.




L. Hiervon Anwendung gemacht auf ein par VielEkke, zum Beispiel das Fünf- und ZehnEkk (§ 319): welche Seiten kommen der Länge des KreisUmfangs näher? die des FünfEkks? oder die des ZehnEkks?

S. Die des ZehnEkks; den AG + BG kommen dem Bogen AGB näher als AB; BH + DH kommen BHD näher als BD u. s. w. Folglich AG

 + GB

+ GB + BH + HD + DI ꝛc. der Kreislinie näher als AB + BD + DE ꝛc.

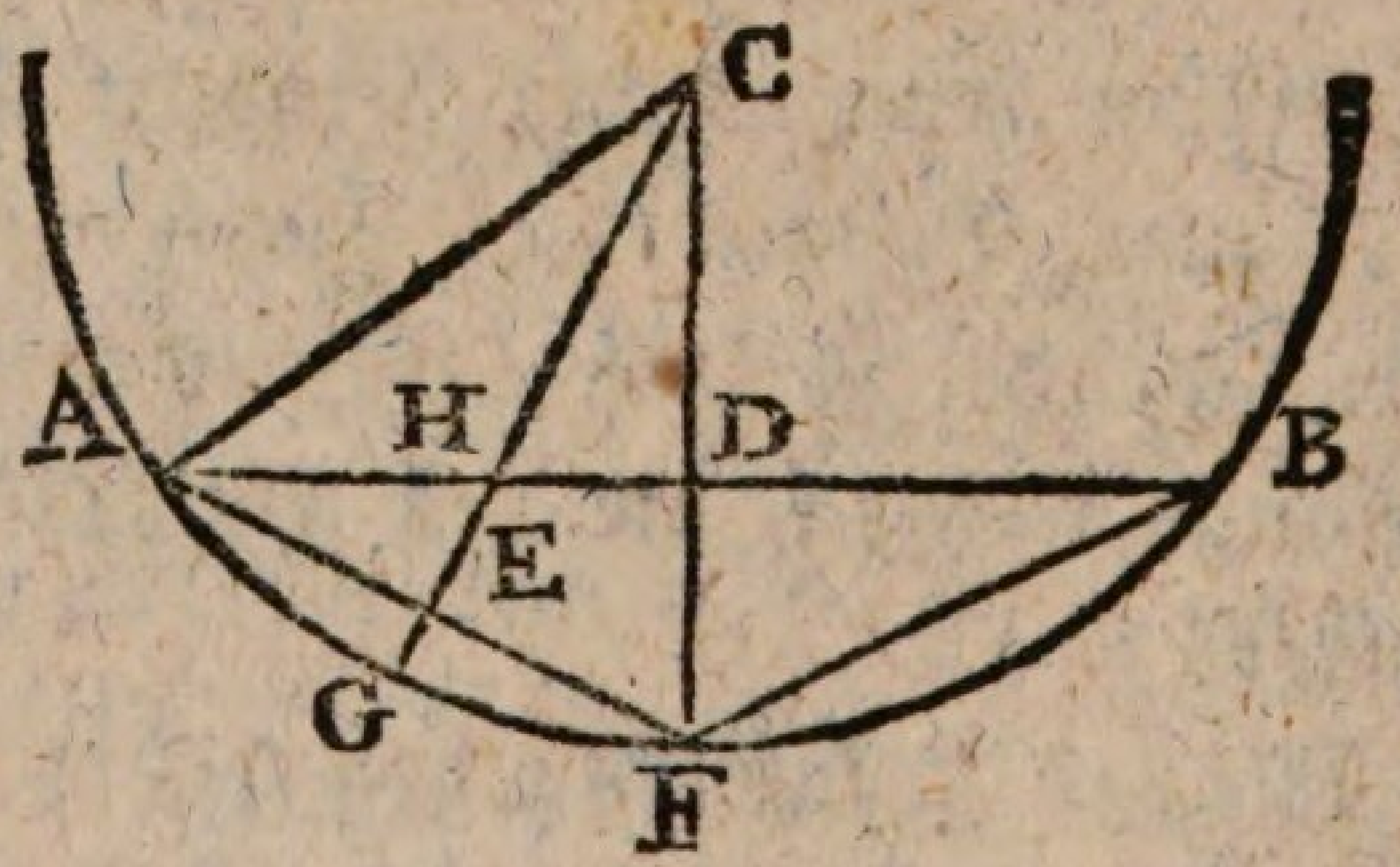
L. Der Umfang eines VielEkks also von doppelter SeitenZahl kömt der Länge des Kreis-Umfangs näher, als der eines VielEkks von halb so vielen Seiten. — Was folgt daraus weiter?

S. Durch fortgesetzte Verdoppelung der VielEkks-Seiten kan man den Umfang des VielEkks der KreisLinie so nahe bringen als man will.

## Sechzehnter Saz.

### § 321.

L. Es wird wieder ein Kreis, und in demselben eine Sehne AB, nach Willkühr, gezogen. Der Bogen AB wird gehalbt in F. Es werden die Sehnen AF, BF gezogen. Aus dem MittelPunkte des Kreises werden auf die Sehnen AB, AF, senkrechte Linien CD, CE gezogen (§ 69).




Welcher dieser senkrechten Linien ist die Längste? CD, oder CE?

Wel-

S. CH > CD (§ 81, 120)
CE > CH (§ 44)

CE > CD

L. Wir wollen die senkrechten Linien CD, CE bis an den Umfang in F und G verlängern. — Welche von diesen Linien, CF und CG, ist nun die Längste?

S. Sie sind beide HalbMesser, und also gleich lang (§ 12, 13).

L. Von den Linien CD, CE, welche kömt dem HalbMesser am nächsten?

S. Sie sind beide kürzer (§ 44). Da aber CE gleichwol länger ist als CD; so muß CE dem HalbMesser am nächsten kommen.

L. Eine senkrechte Linie, also, vom MittelPunkte des Kreises, auf die Sehne des halben Bogens, kömt dem HalbMesser näher, als eine dergleichen auf die Sehne des ganzen Bogens. Dieses auf VielEkke angewandt würde heissen..?

S. Eine senkrechte Linie vom MittelPunkt auf die Seite eines VielEkks von doppelter SeitenZahl, kömt dem HalbMesser näher, als eine auf die Seite eines VielEkks von halb so viel Seiten. Durch fortgesetztes Verdoppeln der VielEkks-Seiten kan man also die aus dem MittelPunkte auf die VielEkks-Seite gezogene senkrechte Linie dem Halbmesser so nahe bringen als man wil.

## Siebzehnter Saz.

### § 322.

L. Durch fortgesezte Verdoppelung der Viel-Ekks-Seiten also kan man den innern Raum desselben der KreisFläche (§ 319); seinen Umfang der KreisLinie (§ 329), und eine aus den MittelPunkte auf seine Seite gezogene senkrechte Linie dem HalbMesser (§ 321), so nahe bringen als man wil. — Was ist nun das Resultat von dem Allen?

S. Durch fortgesetztes Verdoppeln der VielEkks Seiten kan man das VielEkk dem Kreise an Grösse und Gestalt, so nahe bringen als man wil.

L. Recht! Je mehr Seiten das VielEkk erhält, je näher komt es dem Kreise. Ein VielEkk von unendlich vielen Seiten, wenn es möglich wäre, würde dem Kreise unendlich nahe kommen; würde ihm gleich und ähnlich werden. Man kan also sagen: Ein VielEkk von unendlich vielen Seiten ist ein Kreis. Oder auch: Ein Kreis ist ein Viel-Ekk von unendlich vielen Seiten. — Das Viel-Ekk aber ist einem DreiEkk gleich, das zur Grund-Linie den Umfang des VielEkks, und zur Höhe die Höhe eines seiner DreiEkke hat (§ 327). Wie wird dieses auf den Kreis angewandt?

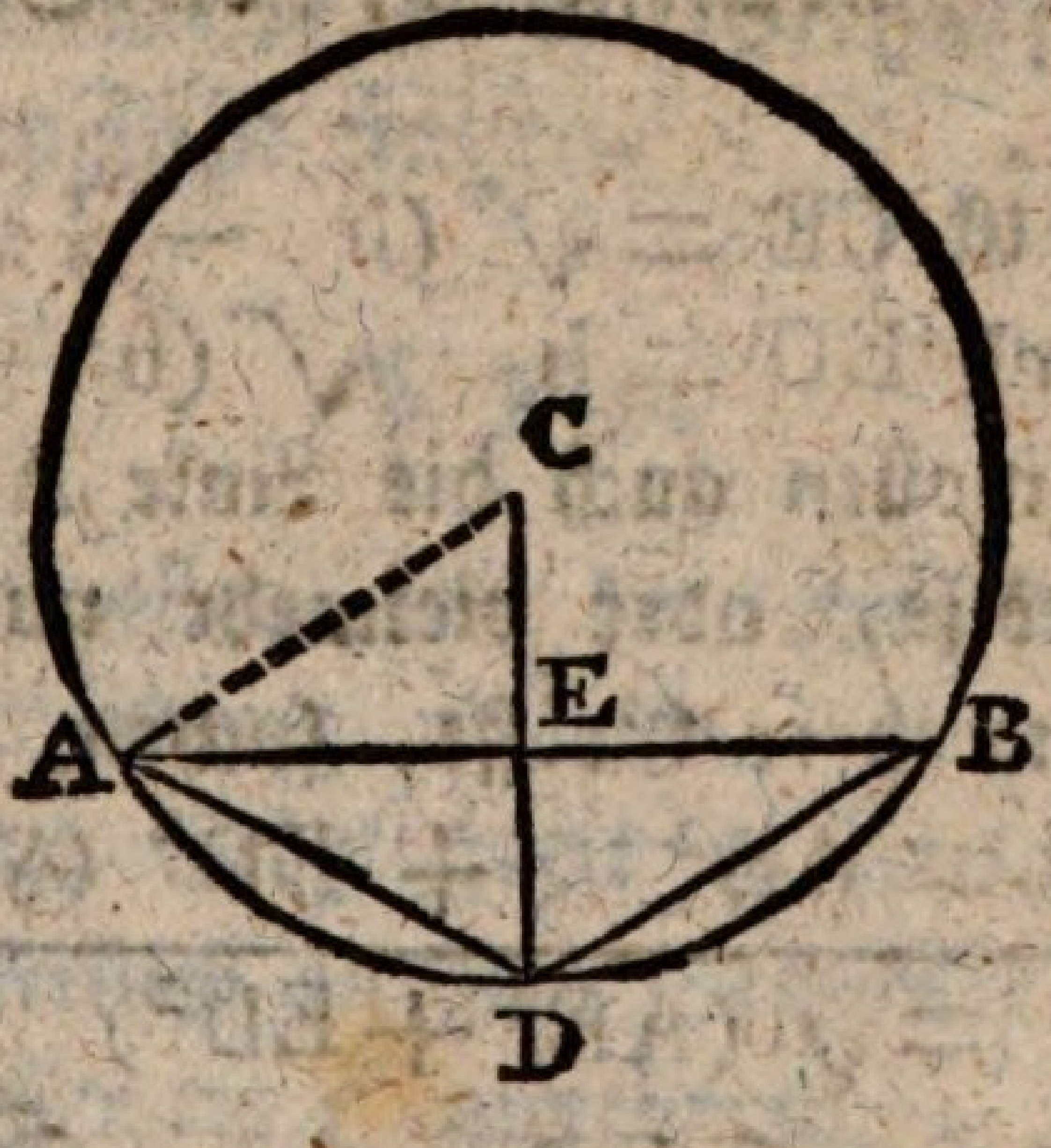
S. Der Kreis ist einem DreiEkke gleich, das zur GrundLinie den Umfang des Kreises, und zur Höhe den HalbMesser hat.

Acht-

## Achtzehnter Saz.

### § 323.

L. Aus einem beliebigen Punkte C, und mit willkührlichem HalbMesser, wird ein Kreis beschrieben; und in demselben wird eine Sehne AB auch nach Willkühr gezogen. Hierauf wird der Bogen AB gehalbt in D, und der HalbMesser CD gezogen, welcher die Sehne AB schneidet in E. — Wie steht dieser HalbMesser auf der Sehne AB?




S. Senkrecht (§. 204).

L. Und wie teilt er sie?

S. In zwei gleiche Teile, AE und BE (§. 177).

L. Wie wird aber der Halbmesser durch die Sehne geteilt? Oder: Wenn die Länge des HalbMessers CD, und der Sehne AB gegeben sind, lässt sich dan wohl die Grösse der Abschnitte CE,

ED, des auf der Sehne senkrecht stehenden HalbMessers CD bestimmen?

S. Ich muß erst eine HülfsLinie CA = CD ziehn. Nun ist

$$1)\ CA^2 = CE + AE^2 \quad (\S\ 165).$$

$$CA^2 - AE^2 = CE^2 \quad (\S\ 34)$$

$$\sqrt{(CA^2 - AE^2)} = CE$$

$$2)\ CD - CE = ED$$

$$CD - \sqrt{(CA^2 - AE^2)} = ED$$

L. Wir wollen, um eine bequemere Formel zu erhalten, den HalbMesser h, die Sehne AB aber s nennen.

S. So ist $CE = \sqrt{(h - \frac{1}{4}s^2)}$

und $ED = h \quad \sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}s^2)}$

L. Wir wollen auch die Linie AD ziehn, und auch ihre Grösse, oder vielmehr nur eine Formel zu Berechnung ihrer Grösse, suchen.

S. $AD^2 = AE^2 + ED^2 \quad (\S\ 165)$

$$AD = \sqrt{(AE^2 + ED^2)}$$

Oder $AD = \sqrt{(\frac{1}{4}s^2 + [h - \sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}s^2)}]^2)}$

$= \sqrt{(2h^2 - 2h\sqrt{[h^2 - \frac{1}{4}s^2]})}$

L. Wenn nun AB die Seite eines FünfEkks wäre, so wäre AD = ?

S. Die Seite eines ZehnEkks.

L. Und wäre AB die eines SechsEkks . .

S. So wäre AD die eines ZwölfEkks.

L. Ue-

L. Ueberhaupt wenn AB die Seite eines Viel-Ekks von n Seiten ist; so ist AD = ?

S. die eines von 2n Seiten.

L. Es lässt sich also, wenn der HalbMesser, und die Sehne eines Bogens bekant, sind die Sehne der Hälfte dieses Bogens finden. Oder, da die Seite eines VielEkks von doppelter SeitenZahl, die Sehne des halben Bogens der VielEkks-Seite einer Figur von halb so viel Seiten ist; so kan man diesen Saz auch so ausdrükken: Aus dem HalbMesser, und den Seiten eines VielEkks, lässt sich die Seite eines VielEkks von doppelter SeitenZahl finden.

## § 324.

L. Wir wollen von der gefundenen Formel (§ 322) Anwendung nehmen. Um uns aber das Verfahren nach Möglichkeit zu erleichtern, wollen wir unsern Versuch an dem SechsEkk machen, und den HalbMesser = 1 annehmen. Wie groß ist dan die Seite des SechsEkks?

S. Auch = 1 (§ 223).

L. Also $h = 1$, und $s = 1$. Hiernach wollen wir nun die für AD gefundene Formel umkleiden.

S. $AD = \sqrt{[2h^2 - 2h\sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}s^2)}]}$
$= \sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4})}]}$

$$= \sqrt{[2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}]}$$
$$= \sqrt{(2 - 2\tfrac{\sqrt{3}}{2})}$$
$$= \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{(2 - 1{,}7320508075688.}$$
$$= \sqrt{0{,}26694919243 11}$$
$$= 0{,}\ 517638\ldots$$

L. Wenn also die Seite des SechsEkks = s = 1 lang wäre; so wäre die eines ZwölfEkks, welche wir t nennen wollen..?

S. Wenn s = 1
so ist t = 0, 517638.

L. Mittels s ward t leicht gefunden, weil s = 1 war, und also als Factor überall vernachlässigt werden konte; mit t aber ist es nicht also. Wie wird nun obige Formel für die Seite des Vier- und zwanzigEkks = t, für die des Achtundvierzig-Ekks = v, für die des SechsundneunzigEkks = x u. s. w. aussehen?

S. Wir müssen in der Formel für das Zwölf-Ekk, s, wenn es auch unwirksam ist, wieder herstellen; für die Seiten der daraus zu findenden VielEkke aber t, v, x, y, z ꝛc. in die Stelle von s setzen.

L. Das ist recht! Und so wäre denn die Formel für das ZwölfEkk?

S. √

S. $\sqrt{[2 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4} s^2)}]} = t$

Für das 24Ekk: $\sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} t^2)}]} = v$

Für das 48Ekk: $\sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} v^2)}]} = x$

Für das 96Ekk: $\sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} x^2)}]} = y$

Für das 192Ekk: $\sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} y^2)}]} = z$

L. Und so weiter. Mit der Ausrechnung selbst wollen wir uns nicht befassen; sondern uns begnügen zu wissen, wie sie gemacht wird, indem Andre dieses mühsame Geschäft schon übernommen, und gefunden haben:

| | | |
|---|---|---|
| die Seite des | 12Ekks | = 0,5176380900 . . |
| = = = | 24Ekks | = 0,2610523834 . . |
| = = = | 48Ekks | = 0,1308062584 6 . |
| = = = | 96Ekks | = 0,0654381650 8 . |
| = = = | 192Ekks | = 0,0327234632 8 . |
| = = = | 384Ekks | = 0,0163623784 8 . |
| = = = | 768Ekks | = 0,0081812069 7 . |
| = = = | 1536Ekks | = 0,0040906125 8 . |
| = = = | 3072Ekks | = 0,002045307360 |
| = = = | 6144Ekks | = 0,001022653814 |
| = = = | 12288Ekks | = 0,000511326936 |

u. s. w.

## Neunzehnter Satz.

### § 325.

L. Der Umfang eines ordentlichen VielEkks wird gefunden durch Multiplication einer Seite des-

desselben mit der Zahl der Seiten (§ 317): aber der Umfang des Kreises wie wird der gefunden?

S. Der Kreis gleicht einem VielEkke von unendlich vielen Seiten (§ 322). Um daher seinen Umfang genau zu wissen, müste man die Seite eines VielEkks von unendlich vielen Seiten durch seine unendliche SeitenZahl multipliciren.

L. Wenn man bedenkt, daß die Seiten, so wie ihre Anzahl sich vermehrt, an Grösse abnehmen; so ist abzusehn, daß wenn ihre Zahl unendlich groß wird, ihre Grösse unendlich klein werden, und endlich ganz verschwinden müsse. Die Faktoren würden also seyn:

$$0 \times \infty = 0 \times \frac{1}{0} \text{ (A. § 148).}$$

Welch Produkt geben die?

S. Ich weis es nicht.

L. Ich auch nicht. Könte also auch die unendliche VielEkks-Seite gefunden werden; so hülfe es nichts, weil das Product ein Unding wäre. Man muß also Verzicht darauf tuhn die Grösse der Kreislinie, oder ihr Verhältniß zum DurchMesser genau zu finden, und sich mit Näherung begnügen. Was heisst das? Oder wie geschiht das?

S. Man muß den Umfang eines VielEkks von vielen Seiten berechnen, nnd ihn für den eines VielEkks von unendlich vielen Seiten annehmen.

L. So ist es! Die Frage ist nun: Wie weit man in dieser Rechnung zu gehn brauche? Bei welchem VielEkke man stille stehn dürfe? Um das ohngefähr beurteilen zu können, wollen wir beim SechsEkke anfangen, und die Rechnung bis zum 153Ekk, und zwar bis auf sieben DecimalZiffern, fortsetzen.

S. VielEkks-Umfang.

6Ekk = 1,00000000 × 6 = 6,0000000
12Ekk = 0,51763809 × 12 = 6 21165714
24Ekk = 0,2610523 × 24 = 6,2652576
48Ekk = 0,1308062 × 47 = 6,2786976
96Ekk = 0,0654381 × 96 = 6,2820672
192Ekk = 0,0327234 × 192 = 6,2829020
384Ekk = 0,0163623 × 384 = 6,2831616
768Ekk = 0,0081812 × 768 = 6,2831616
1536Ekk = 0,0040905 × 1536 = 6,2831616

L. Die drei lezten Producte sind einander gleich. Woher kömmt es, daß sie nicht mehr wachsen?

S. Das kömt wol daher, daß die Seiten der VielEkken nicht auf mehr DecimalStellen berechnet sind.

L. Das ist die Ursache. Um uns davon durch den AugenSchein zu überführen, wollen wir der lezten Zahl noch eine ihr gehörige Ziffer 1 anhenken.

S. 6,00409061.. × 1536 = 6,2831769.

L. Henkt

L. Henkt man dem ersten Factor noch eine Ziffer, 2, an; so erhält man zum Produkt 6,2831800. — Bei unsrer Berechnung der VielEkks-Seiten nahmen wir den HalbMesser = 1 (§ 324), oder den DurchMesser = 2 an, und fanden, unter dieser Voraussetzung, den Umfang des 1536Ekks = 6,2831616.. oder genauer = 6,2831800... Wie groß aber würde eben dieser Umfang ausfallen, wenn man den DurchMesser = 1 annähme?

S. Nimt man den DurchMesser nur halb so groß; so würde auch der Umfang nur halb so groß

$$= \frac{6,2931800}{2} = 3,1415900..$$

L. Für den DurchMesser 1 also ist der Umfang des 1536Ekks 3,14159... Für den Kreis ist, wie sich von selbst versteht, dieser Umfang noch zu klein und man findet ihn, bei fortgesetzter Rechnung 3,141592 653589 793238... Sechs Ziffern also hat unsre gefundene Zahl mit der wahren gemein. Erst in der siebenten weicht sie von ihr ab. Wie viel also ist die unsrige zu klein?

S. Wahre Zahl = 0,1415926
unsere gefundene Zahl = 3,1415918..

Unterschied = 0,0000008 = $\frac{8}{1.000000}$

= $\frac{1}{1.250000}$. Das ist noch kein MillionTeilchen.

L. Wir wissen also nun das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser durch Näherung zu

zu finden: es fehlt uns aber noch an einer allgemeinen Formel für den Umfang. Wir wollen ihn p, den DurchMesser d nennen; so ist

$$1 : 3{,}14.. = d : p$$

$$p = \frac{d \times 3{,}14}{1} \text{ (A. § 243)} = d \times 3{,}14..$$

Wäre z. B. der Durchmesser 2,5, wie groß wäre den der Umfang?

S. Wenn $d = 2{,}5$; so ist $p = 3{,}14 \times d = 3{,}14 \times 1{,}5 = 7{,}8$; oder genauer $= 3{,}14159 \times 2{,}5 = 7{,}853975...$

L. Das ist richtig. Der Kürze und Bequemlichkeit wegen wollen wir in der Folge 3,141592.. durch $\pi$, den DurchMesser = 1 aber durch $\delta$ andeuten, so daß $\frac{d\pi}{\delta}$ und $\frac{d \times 3{,}1415..}{1}$ gleichbedeutende Ausdrükke seien. — Von der Zahl $\pi$ nimt man jedes Mal so viele Ziffern als der Grad der Genauigkeit, welchen man beabsichtigt, erfodert. Gewöhnlich begnügt man sich mit 3,14..

## §. 326.

L. Anstat 1 kan man den DurchMesser auch 100, 1000, 10000 ꝛc. annehmen. Es fragt sich: Wie groß ist der Umfang, wenn der DurchMesser 10, 100, 1000 ꝛc. angenommen wird?

S.

S. 1 : 3,141592.. = 10 : 31,41592...
= 100 : 314,1592...
= 1000 : 3141,592

u. s. w. (A. § 235, 204).

## § 327.

Andre bedienen sich einer noch mühsamern Art das Verhältniß des Umfanges zum DurchMesser zu bestimmen. Da der Umfang eines in den Kreis beschriebenen VielEkks kleiner, der eines um den Kreis beschriebenen aber grösser ist, als der Umfang des Kreises; so beschreiben sie eins in den Kreis, und ein andres von eben so viel Seiten um den Kreis; verdoppeln hierauf die Seiten beider, und schliessen so den Kreis immer mehr ein. Durch diese doppelte Arbeit erhalten sie weiter nichts, als den geringen Vorteil, mit Gewißheit wissen zu können, welche der gefundenen Ziffern vollkommen richtig, und keines Wachstums mehr fähig sind. Und da die Seite eines um den Kreis beschriebenen Quadrats dem DurchMesser gleich ist; so pflegen sie vom Quadrat anzufangen, und so finden sie durch fortgesetzte Verdoppelung, den äussern Umfang eines VielEkks von 1073,741824 Seiten.

6,283185 307179 586491 56437, und den innern:

6,283185 307179 586450 93..

Da diese Zahlen nun bis auf sechzehn DecimalZiffern übereinstimmen, so ist das ein Zeichen, daß bis dahin die Rechnung zuverlässig ist. Es hat aber diese VerfahrungsArt, ausser der doppelten Berechnung, noch das Nachteilige, daß der Beweis, daß der Umfang des

äussern

äussern VielEkks grösser ist als die KreisLinie, weitläuftig, und schwer zu führen ist. Es gibt auch leichtere BerechnungsArten, die aber erst in der Analysis gelehrt werden können.

## §. 328.

Wenn man bedenkt, daß in und um den Kreis beschriebene VielEkke, und wenn sie Trillionen Mal Trillionen Seiten hätten, den KreisUmfang nie erreichen können, sondern erste stets kleiner, leztre stets grösser bleiben müssen; so wird man überzeugt, daß auf diesem Wege das wahre Verhältniß des Umfangs zum DurchMesser nie auszumitteln ist. Da zum praktischen Gebrauch aber zehn bis zwölf Ziffern mehr als hinlänglich sind, wie Kästner bezeigt hat; so verdiente eigentlich Franz Vieta, und allenfalls Adrian Romanus von denen Erster das Verhältniß bis auf zehn, Lezter aber bis auf funfzehn DecimalZiffern angegeben hat, unsern Dank, und die Arbeiten eines Ludolf von Köln, eines Sharp, eines Machin, eines Lagny, und noch eines Ungenanten, die sie bis auf 35, 76, 100, 127, und 156 berechnet haben, scheinen ziemlich überflüssig (Man sehe Kästners Geometrie, fünfte Ausgabe, S. 330, 331; und eben desselben geometr. Abhandl. zweite Samml. N. 20). —

## §. 329.

Noch verdient bemerkt zu werden, daß Archimedes das Verhältniß des DurchMessers zum Umfange wie 7 zu 22; Adrian Metius aber wie 113 zu 355 angegeben hat. Da nun

$7 : 22 = 1 : 3,1428\ldots$
und $113 : 355 = 1 : 3,14159292\ldots$
so erhellt, daß erstes nur auf zwei, letztes aber sechs DecimalStellen richtig ist; wonach also der davon zu machende Gebrauch zu beurteilen.

## Zwanzigster Satz.

### § 330.

L. Da das Verhältniß des DurchMessers zum Umfange bekant ist; so kan man nicht nur aus dem gegebenen DurchMesser den Umfang, sonderun auch, wenn der Umfang unbekant ist, den DurchMesser finden. Zuerst wollen wir eine allgemeine Formel suchen.

S. $\pi : \delta = p : d$

$$d = \frac{\delta p}{\pi} = \frac{1 p}{\pi} = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{3,14\ldots}$$

L. Wenn also $p = 7,85$ ist?

S. So ist $$d = \frac{7,85}{3,10} = 2,5$$

L. Gesetzt aber p wäre 5400?

S. So ist $$d = \frac{5400}{3,14159} = \frac{5400,00000}{3,14159\ldots} = 1718,874\ldots$$

L. Da der Umfang der Erdkugel 5400 geographische Meilen ist; so ist ihr Durchmesser also 1718,874.. Meilen. Ein-

π = 3,14
δ = 1
p der Umfang
d der Durchmesser

## Ein und zwanzigster Satz.

### §. 331.

L. Wir wissen nun aus dem DurchMesser des Kreises seinen Umfang, und aus dem Umfange den DurchMesser zu finden: wie wird aber sein FlächenInhalt gefunden?

S. Der Kreis gleicht einem DreiEkke, das zur GrundLinie den Umfang des Kreises, und zur Höhe dessen HalbMesser hat (§ 322). Man muß also, um den FlächenInhalt des Kreises zu finden, den halben Umfang durch den HalbMesser, oder den ganzen Umfang durch den halben HalbMesser, multipliciren (§ 308).

L. Wir wollen den Inhalt f, den HalbMesser r nennen. Das übrige bleibt wie bisher. Wie groß ist nun f?

S. $f = \frac{pr}{2} = \frac{\pi d \times r}{2}$ (§ 325) $= \frac{\pi 2 r \times r}{2}$

$= \pi r r.$

L. Es sei $d = 5,6$

S. So ist $r = 2,8$

$p = d\pi = 17,5929188..$

$f = pr = 8,7964594 \times 2,8$

$= 24,6300863...$

Oder auch:

$$rr = 2{,}8 \times 2{,}8 = 7{,}84$$

$$f = \pi rr = 3{,}14159265 \times 7{,}84 = 24{,}630 = 0863\ldots$$

L. Weil die Ausmessung durch Quadrate geschiht (§ 302); so nennt man die Berechnung der KreisFläche die Quadratur des Kreises. Der Kreis lässt sich also, wie wir gesehn haben, nicht genau quadriren. Woher kömt das?

S. Weil man den Umfang nicht genau bestimmen kan (§ 325).

## Zwei und zwanzigster Saz.

### §. 332.

L. Es sei eines Kreises Durchmesser $= d$,
sein Umfang $= p$;
der Durchmesser eines andern Kreises $= D$,
dessen Umfang $= P$:
wie groß sind nun p und P?

S. $p = d\pi$
und $P = D\pi$ } (§ 324).

L. Es ist also $p : d\pi = P : D\pi$

$$p : P = d\pi : D\pi \quad (\text{A. § 242})$$

$$p : P = d : D = r : R \quad (\text{A. § 235})$$

Was heisst das?

S. Die

S. Die Kreislinien verhalten sich wie ihre Durchesser, oder auch wie ihre Halbmesser.

L. Es ist also auch $\left.\begin{array}{l} D : d = P : p \\ \text{und } R : r = P : p \end{array}\right\}$ (A. § 242)

folglich $p = \frac{Pd}{D} = \frac{Pr}{R}$ (A. § 243)

## Drei und zwanzigster Satz.

### § 333.

L. Die Flächen zweier Kreise sollen f und G heissen. Aber $f = \frac{\pi d \times r}{2}$ (§ 331). Lässt sich diese Formel wohl in eine andere verwandeln worin dd vorkäme?

S. $\frac{\pi d \times r}{2} = \frac{\pi d \times 2r}{4}$ (A. § 64) $= \frac{\pi dd}{4}$

L. Also $f = \frac{\pi dd}{4}$

folglich $F = \frac{\pi DD}{4}$ (§ 19)

$f : \frac{\pi dd}{4} = F : \frac{\pi DD}{4}$



f : F

$$f : F = \frac{\pi dd}{4} : \frac{\pi DD}{4} \text{ (A. §. 242)}$$

$$\left.\begin{array}{l} = \pi dd : \pi DD \\ = dd : DD \end{array}\right\} \text{ (A. § 235).}$$

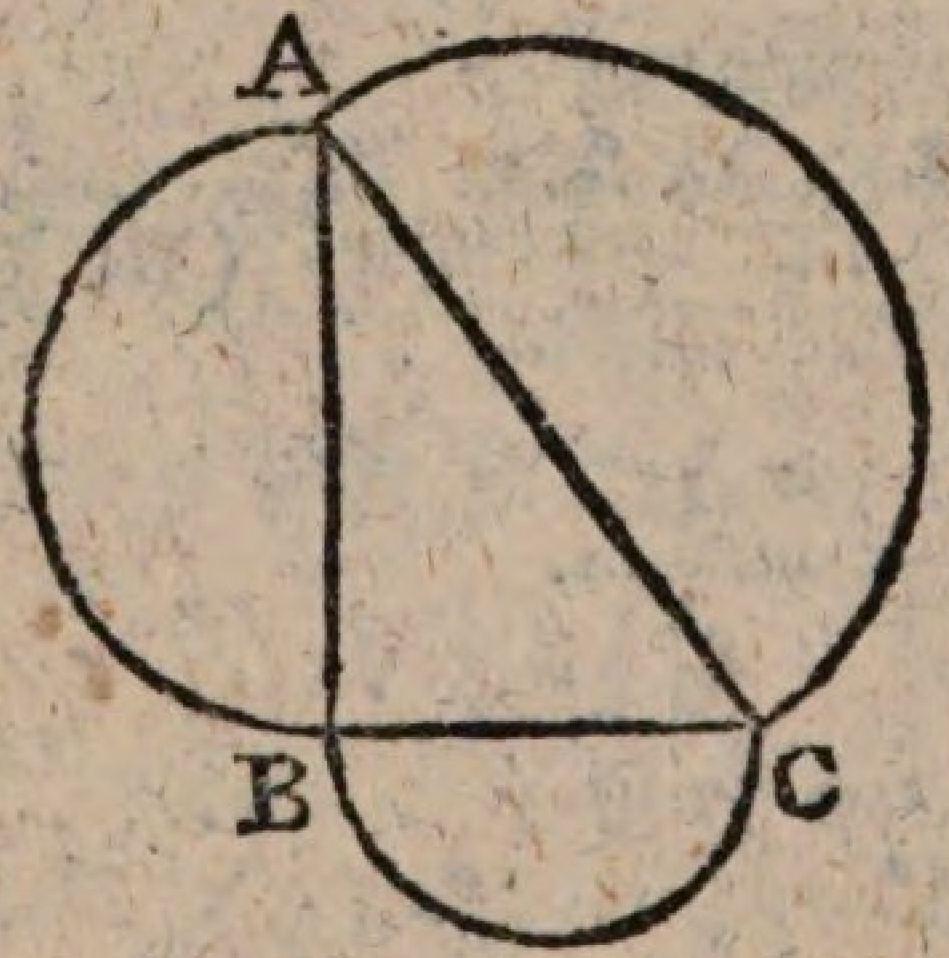
Was heisst das?

S. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer DurchMesser.

## Vier und zwanzigster Satz.

### § 334.

L. Es wird ein rechtwinkliges DreiEkk ABC nach Willkühr gezeichnet. — Wie verhält sich nun das Quadrat der längsten Seite AC zu den Quadraten der beiden kürzern AB und BC?




S. Es ist so gross wie beide zusammen (§ 105).

L. Wir wollen auf jeder Seite des DreiEkks einen HalbKreis beschreiben. — Wie groß ist nun der auf AC beschriebene HalbKreis?

S. So groß wie die auf AB und BC beschriebenen zusammen: denn die Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser (§ 333).

L. Ein auf der längsten Seite eines rechtwinkligen DreiEkks beschriebener Kreis also..

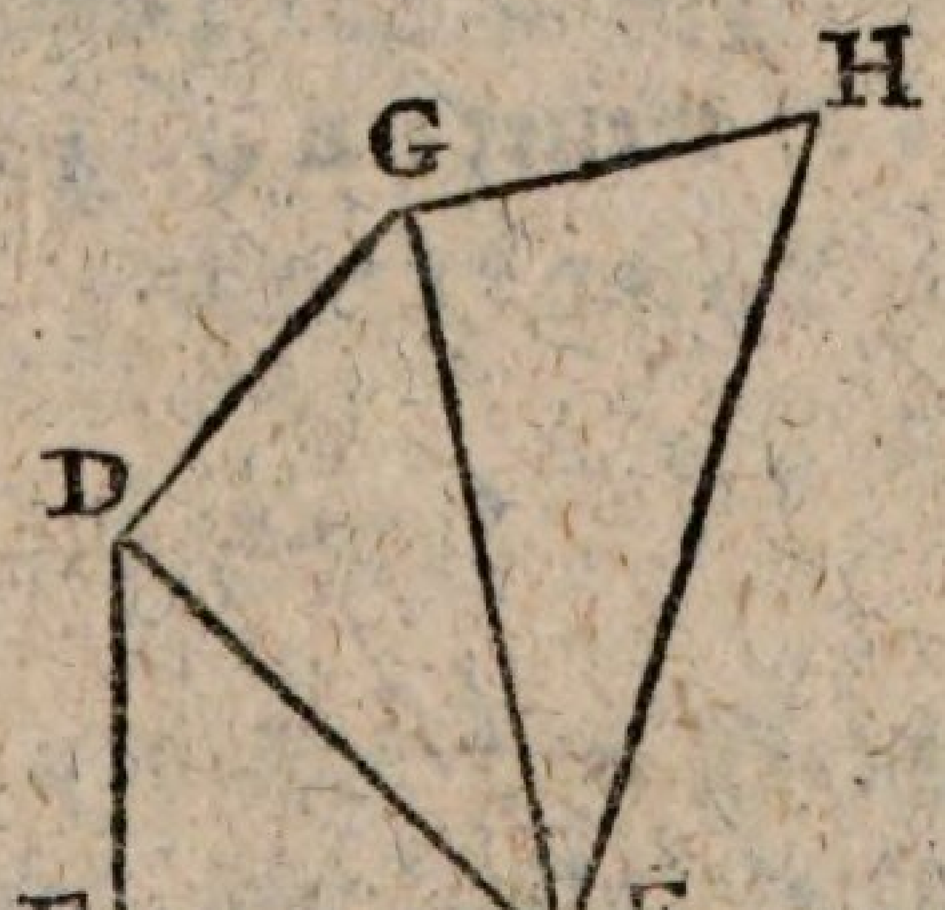
S. Ist so groß als die auf den beiden kürzern beschriebenen zusammen genommen.

## § 335.

L. wenn also zwei Kreise, oder HalbKreise gegeben sind, lässt sich den wol einer machen der so groß ist als die gegebenen zusammen?

S. O ja, man muß die DurchMesser der gegebenen Kreise rechtwinklig zusammen setzen wie AB und BC; (§ 334) und die Linie AC ziehen, die der DurchMesser eines Kreises von der Grösse der beiden übrig zusammen genommen ist.

L. Und wenn die Seiten DE und EF gleich lang gemacht würden?




S. So

S. So wäre ein Kreis auf DF doppelt so grosſ als einer auf AB oder BC (§ 168).

L. Es lassen sich also nicht nur mehre Kreise in einen verwandeln; sondern es lässt sich auch ein Kreis verdoppe , verdreifachen u. s. w. — Wie geschiht dies letzte? Wie verdreifacht man einen Krei ?

S. Erst suche ich den DurchMesser DF des doppelten Kreises, wie vorhin Dan setze ich auf das Ende von DF wieder den DurchMesser des einfachen Kreises DG senkrecht, so ist GF der DurchMesser des verdreifachten Kreises.

L. Es sei der DurchMesser DE = EF des einfachen Kreises = d; wie groß ist dan DG, GF, HF oder der DurchMesser des doppelten, des dreifachen, des vierfachen ꝛc. Kreises?

S. Wenn DE = d
so ist $DF = \sqrt{2dd} = d\sqrt{2}$
$GF = \sqrt{3dd} = d\sqrt{3}$
$HF = \sqrt{4dd} = d\sqrt{4}$
und so geht es weiter: $d\sqrt{5}$, $d\sqrt{6}$, $d\sqrt{7}$, $d\sqrt{8}$ ꝛc.

## Fünf und zwanzigster Satz.

### §. 336.

L. Wenn der DurchMesser 1 angenommen wird, wie groß ist dan der Umfang, und der FlächenInhalt des Kreises?

S. Wenn d = 1

so ist p = 3,1415926 . . . (§ 325)

und $f = \frac{\pi dd}{4}$ (§ 333) = $\frac{3{,}1415926\,.\,.\times 1}{4}$ = 0,785398 16 . . .

L. Und das Quadrat des DurchMessers ist 1 × 1 = 1. Welches ist nun das Verhältniß der KreisFläche zum Quadrate des DurchMessers?

S. f : dd = 0,785398 . . . : 1

L. Das ist = 785398 . . . : 1000000

= 78540 : 100000

= 7854 . . . : 10000

= 785 . . . : 1000

## Sechs und zwanzigster Satz.

### § 337.

L. Wir wissen nun aus dem DurchMesser des Kreises seinen Umfang und seinen Inhalt zu finden

(§ 325, 331): wie wird aber aus dem Inhalte der Umfang und der DurchMesser gefunden?

S. $f = \frac{pr}{2}$ (331) $= p\frac{r}{2}$

$\frac{2f}{r} = \frac{f}{r:2} = p = d\pi$ (§ 325)

$\frac{p}{\pi} = \frac{p}{3,14..} = d$

Der Inhalt des Krises durch den halben Halb-Messer dividirt, gibt den Umfang; und den Umfang durch 3,14.. dividirt, gibt den Durch-Messer.

L. Das ist zwar richtig; es setzt aber den Halb-Messer als bekant voraus. Wie aber, wenn der unbekant wäre? — Wir müssen für f den Inhalt eine andere Gleichung suchen, worin eine schon bekante Grösse $\pi$ (§ 325) vorkömt?

S. $f = \pi rr$ (§ 331)

$\frac{f}{\pi} = rr$

$\sqrt{\frac{f}{\pi}} = r$

$2r = d$

$d\pi = p$ (§ 325).

Den

Den FlächenInhalt durch 3,14.. dividirt, und aus dem Produkte die QuadratWurzel gezogen, gibt den HalbMesser. Diesen verdoppelt, gibt den DurchMesser; und diesen durch 3,14.. multiplicirt, gibt den Umfang?

L. Es sei der Inhalt des Kreises 24,63 : 00863; welches ist sein HalbMesser, sein DurchMesser, und sein Umfang

S. $\frac{24,6300863}{3,14159..} = 7,84 = rr$

$\sqrt{7,84} = 2,8 = r$

$2,8 \times 2 = 5,6 = d$

$5,6 \times 3,14.. = 17,5929.. = p$

L. Wenn aber f = 1 angenommen wird?

S. Wenn f = 1

so ist $\frac{f}{\pi} = \frac{1}{3,14159..} = 0,318309.. = rr$

$\sqrt{\frac{f}{\pi}} = \sqrt{0,318309..} = 0,564 = r$

$2r = 0,564 \times 2 = 1,128 = d$

$d\pi = 1,128 \times 3,14159.. = 3,54371..$
$= p.$

## Sieben und zwanzigster Satz.

§ 338.

L. Wenn der DurchMesser 2 ist, wie groß ist dan der Umfang?

S. Wenn $d = 2$,

so ist $p = 3,14.. \times 2 = 6,28318...$ (§ 325).

L. Und wenn der Umfang 6,283..., wie groß ist dan ein Bogen von 50 Graden nach LängenMasse gemessen? den wir a nennen wollen.

S. $360 : 50 = 6,283.. : a$

$$a = \frac{6,283.. \times 50}{360} \text{ (A. §. 243) } = 0,87266..$$

L. Aus dem gegebenen DurchMesser, oder Umfange also, lässt sich jeder in KreisMasse gegebene Bogen in LängenMasse finden. — Wie ist das Verfahren?

S. Man schließt so:

Wie sich verhält der ganze Umfang in KreisMasse $= 360°$

zu den gegebenen Bogen in KreisMasse $= 50°$;

so verhält sich der ganze Umfang in LängenMasse $= 6,285...$

zu dem LängenMasse des gegebenen Bogens $= 0,87266 = a$

L. Um

L. Um eine allgemeine Formel zu haben, wollen wir das KreisMaß des gegebenen Bogens, n, den Umfang im LängenMasse aber p nennen.

S. So ist $a = \frac{pn}{360^\circ}$

L. Es sei $p = 6{,}28318..$
$n = 63^\circ\ 17'$

S. So ist $pn = 6{,}28318 \times 63^\circ\ 17'$ $= 6{,}28318 \times 3797 = 23857{,}234$ Min.

$$\frac{pn}{360^\circ} = \frac{23857{,}234}{300 \times 60} = \frac{23857{,}234}{21600} = 1{,}1045..$$

§ 339.

L. Man hat Tafeln berechnet, welche die Grade, Minuten und Sekunden eines Kreises dessen HalbMesser 1 ist, in LängenMasse, bis auf sieben und zwanzig DecimalStellen, angeben. Wolte man z. B. den Bogen von $63^\circ\ 17'$ eines solchen Kreises wissen; so findet man:

Bogen $63^\circ = 1{,}0995574287564 27..$
$10' = 0{,}0029088820866 57..$
$7' = 0\ 0020362174606 60..$

Bogen $63^\circ\ 17' = 1{,}1045025283037 44..$
Welches würde nun das LängenMaß eben dieses Bogens, von $63^\circ\ 17'$, in einem Kreise seyn, dessen HalbMesser 3,65 wäre?

S.

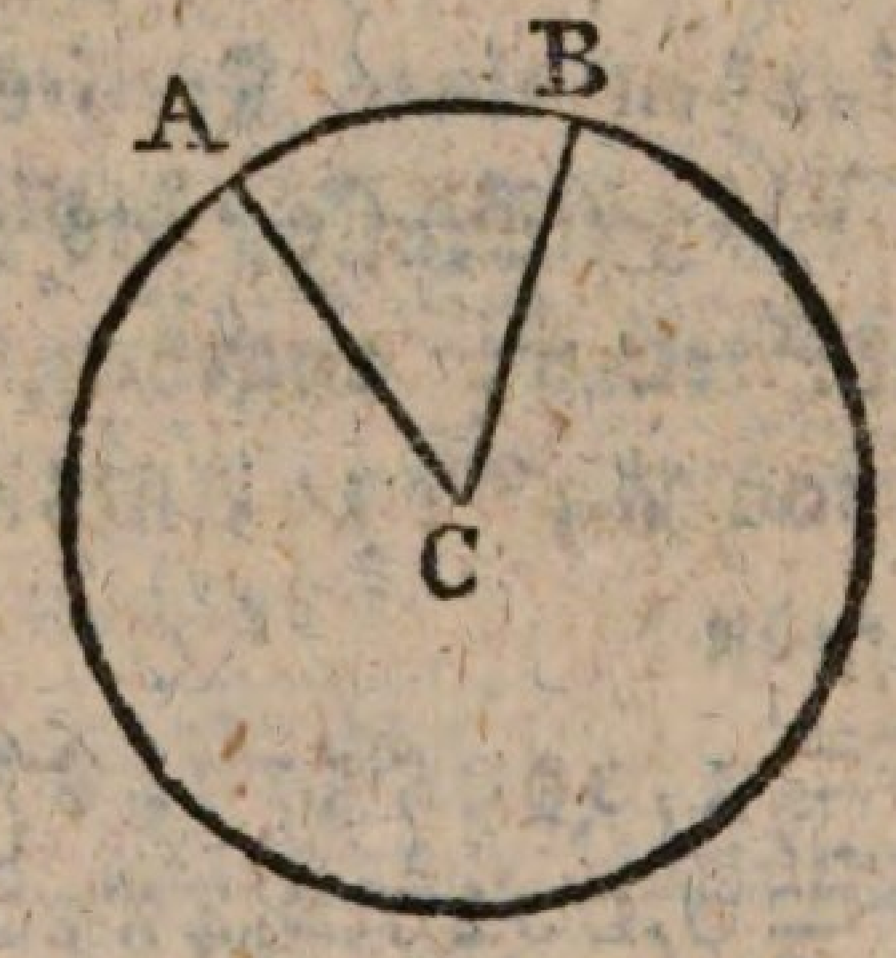
S. 1,10450252830374 × 3,65 = 4,03143422830866 5..

L. Ganz recht! Und wer des Abt Häselers Geometrie hat, kan die daselbst § 226 befindliche Rechnung, welche 40,294 Fuß zum Resultat gibt, hiernach berichtigen.

## Acht und zwanzigster Satz.

### § 340.

L. In einem beliebigen Kreise werden zwei HalbMesser, nach Willkühr gezogen; so entsteht ein Ausschnitt ACBA. Die Frage ist: Wie verhält sich dieser Ausschnitt zum ganzen Kreise?




S. Jeder Winkel verhält sich in vier rechten Winkeln, wie der aus seiner Spitze, zwischen seinen Schenkeln beschriebene Bogen zum ganzen Umfange (§ 212).

L. Das

L. Das ist richtig; nur hier ist von Ausschnitte, und nicht von Winkeln die Rede.

S. Der Ausschnitt ist doch eigentlich ein Winkel, dessen Oefnung der Mündung durch einen Bogen gemessen oder begrenzt ist.

L. Das ist wahr. Es passt wirklich auf den Ausschnitt alles, was der angeführte Satz von Winkeln besagt. Es ist also

$$ACBA : f = AB : p$$

das heisst..?

S. Der Ausschnitt verhält sich zur Kreis-Fläche, wie der Bogen welcher ihn begrenzt, zum ganzen Umfange.

L. Es sei der DurchMesser = 0,8
der Bogen AB = 50°;
wie groß ist dan der Ausschnitt ACBA?

S. Wenn $d = 0,8$
so ist $dd = 0,64$
und $f = 0,502654822\ldots$
und $ACBA = 0,502654822..$

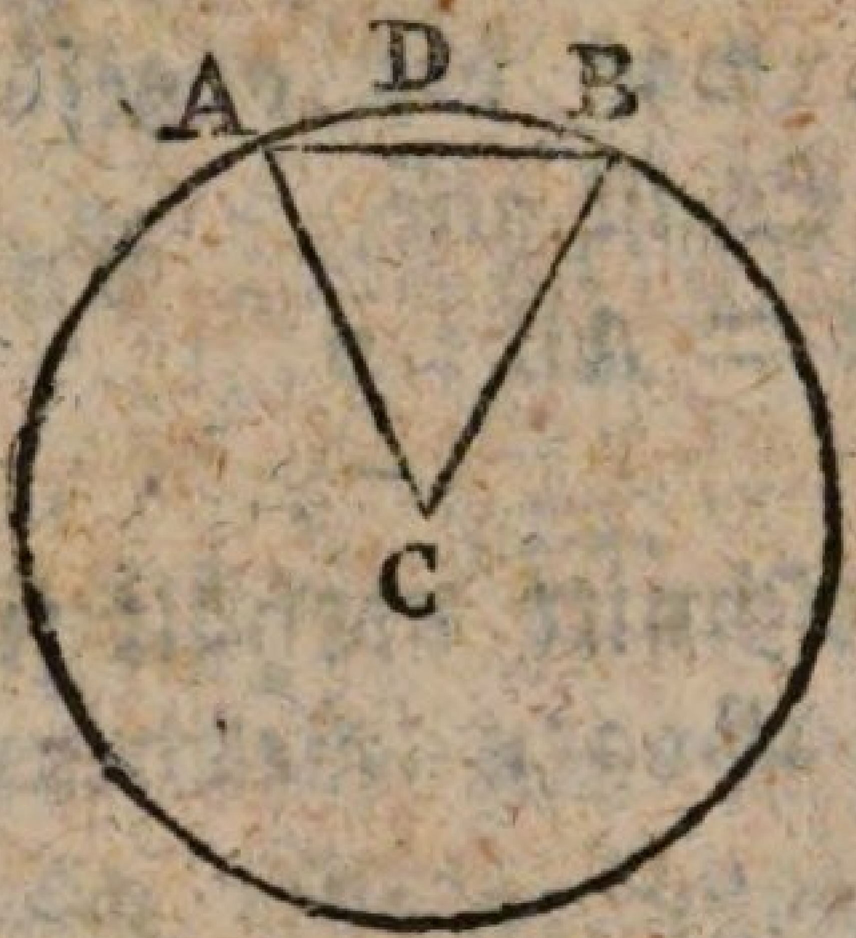
$$\text{und } ACBA = \frac{0,502654 \times 50}{360}$$

$$= 0,06981318..$$

§ 341.

L. In der vorigen Zeichnung wird die Sehne AB gezogen. Das zwischen der Sehne und ihrem

rem Bogen begriffene Stükk des Kreises ADBA heisst ein Abschnitt. Wenn nun, wie vorhin (§ 340) der Winkel C = 50°, und der HalbMesser AC = 4 ist, wie wird an der Ab- Abschnitt ABDA gefunden?




S. Man muß erst den Ausschnitt ACBA berechnen (§ 340), und von diesem das DreiEkk ACB abziehn; so bleibt der Abschnitt ABDA übrig. ACBD — ACB = ABDA = 0,06981317 — △ ACB.

L. Ganz richtig! Aber wie wird des DreiEkks Jnhalt gefunden? Man kennt nichts von ihm als die Seiten AC = BC, und allenfalls die Winkel (§ 214 u. 55). Ist das genug?

S. Nein, man muß auch seine Höhe wissen (§ 308).

L. Diese nun kan man messen, aber auch berechnen. Welches von beiden ist am rahtsamsten?

L. Das

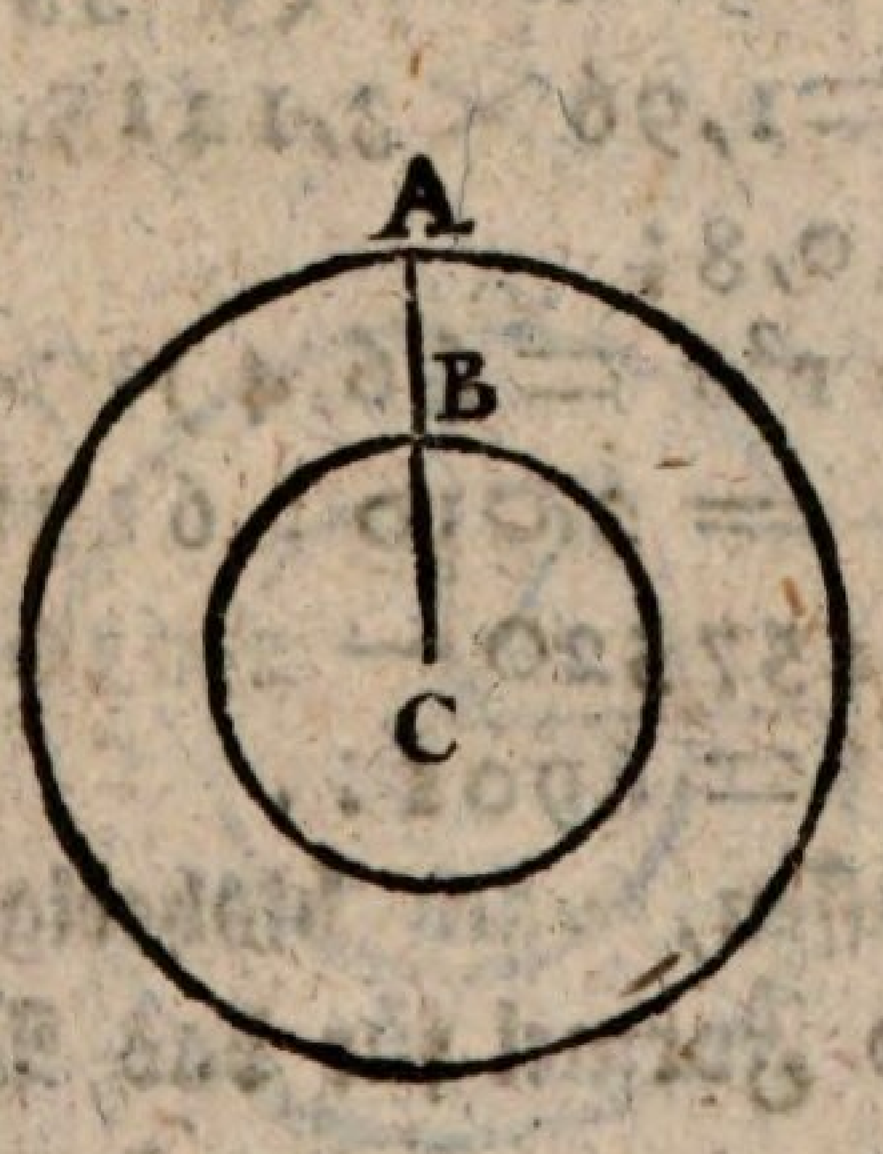
S. Das Berechnen. Es gibt die Sache genauer, und ist gemeiniglich auch weniger mühsam.

L. Das ist richtig: und daher ist es Regel, was man ausrechnen kan, nie auszumessen. Allein die Berechnung der DreiEcks-Höhe findet hier noch nicht Stat, sondern wird in der Trigonometrie gelehrt. Wir sind also genötigt die Berechnung des Abschnitts bis dahin zu verschieben: und dieser unausgeführte Versuch dient nur den Nutzen der Trigometrie vorläufig zu zeigen.

## Neun und zwanzigster Satz.

### § 342.

L. Aus einem gemeinschaftlichen MittelPunkte C werden, mit willkührlichen HalbMessern, zwei Kreise gezeichnet. Der zwischen beiden concentrischen KreisLinien enthaltene Raum heisst der Ring. Wie wird nun des Ringes Inhalt gefunden?




M S.

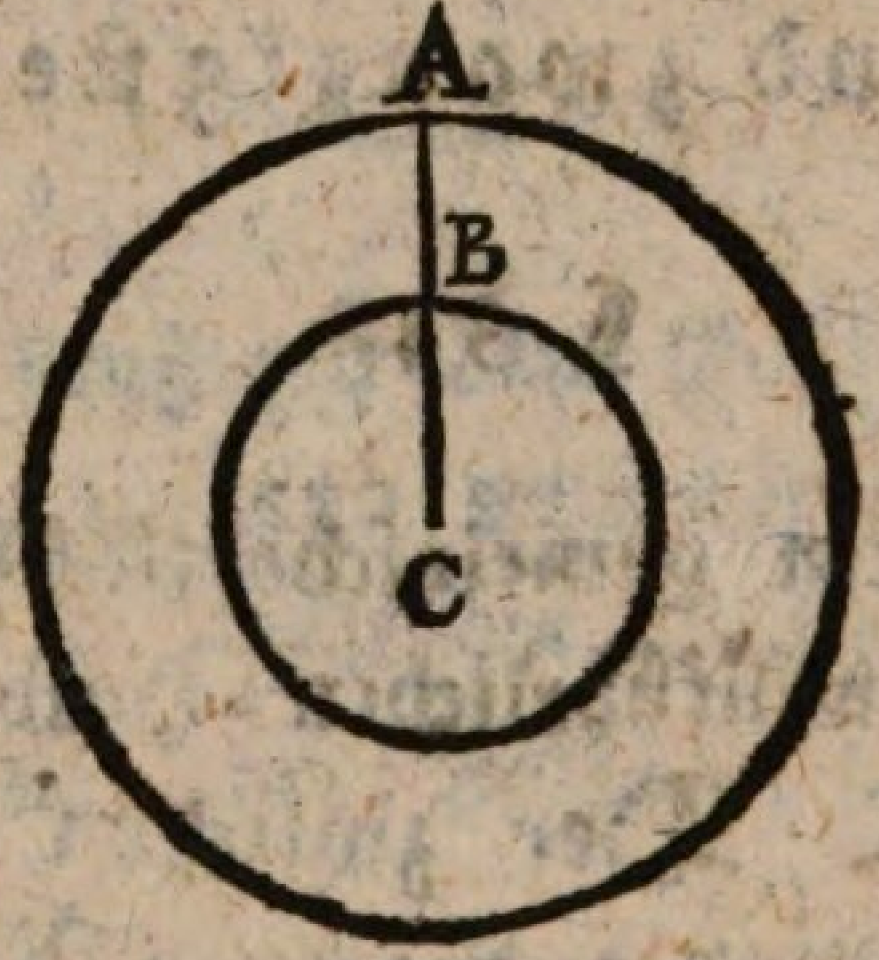
+ S. 216 gg

S. Man muß den Inhalt beider Kreise suchen (§ 331), und hierauf den Inhalt des kleinern von des grössern seinem abziehen; so bleibt der Ring übrig.

L. Es sei CA des grössern Kreises HalbMesser $= 1{,}4 = R$

CB des kleinern Kreises HalbMesser $= 0{,}8 = r$

Welches ist der Inhalt des Ringes?




S. Wenn $R = 1{,}4$;

so ist $F = R^2 \pi$ (§ 331) $= (1{,}4)^2 \times 3{,}141592.. = 1{,}96 \times 3{,}1415.. = 6{,}157520..$

Und wenn $r = 0{,}8$;

so ist $f = r^2 \pi = (6{,}4)^2 \times 3{,}141592..$
$= 2{,}010 : 6188..$

Und $F - f = 6{,}157520 - 2{,}0106188.. = 4{,}14$
$= 6901..$

L. Wir müssen, nach bisheriger Gewohnheit, eine algebraische Formel für das Verfahren suchen.

S. $f = \pi rr$ )
$F = \pi RR$ ) § 330.

Ring $= F - f = \pi RR - \pi rr = (R^2 - r^2)\pi$

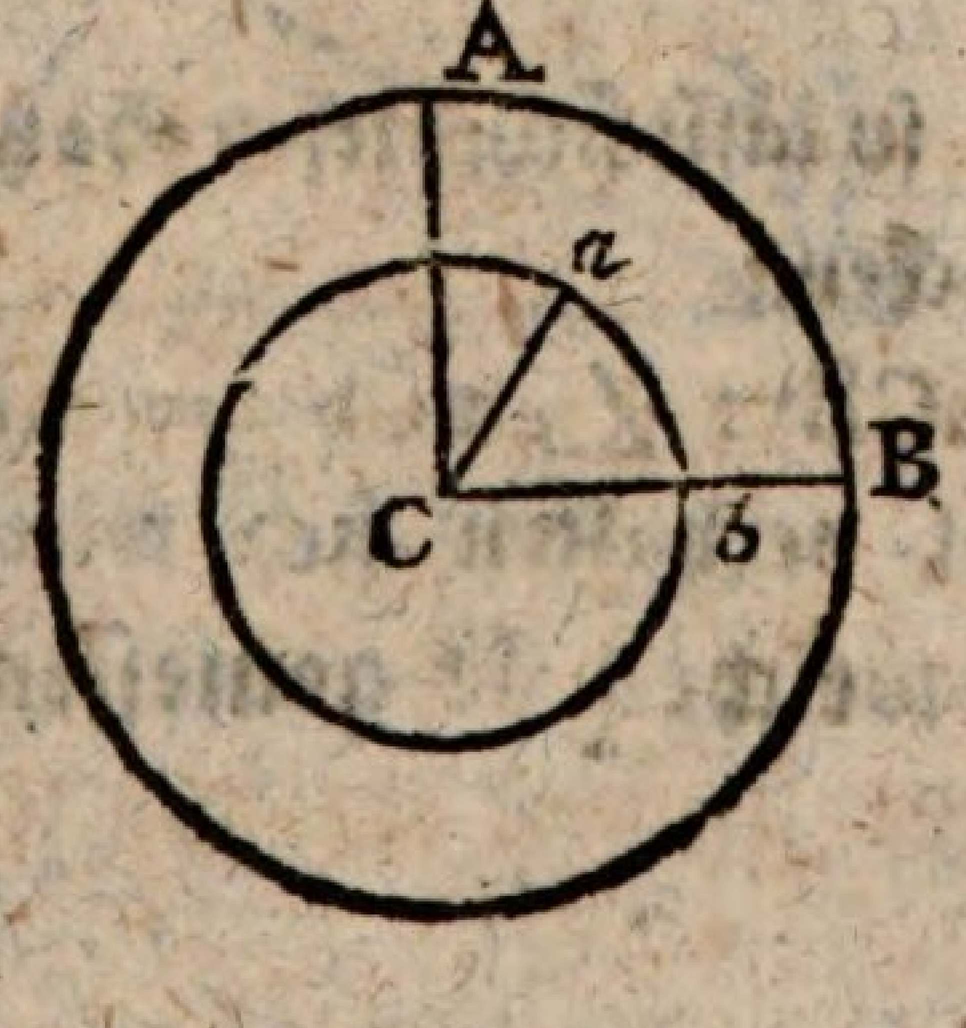
L. Die Formel $(R^2 - r^2)\pi$ lehrt eine beträchtliche Verkürzung des Verfahrens, und verdient daher, daß man auch danach die Rechnung mache.

S. $R^2 - r^2 = (1,4)^2 - (0,8)^2 = 1,96 - 0,64 = 1,32$ $(R^2 - r^2)\pi = 1,32 \times 3,141592 \ldots = 4,146901 \ldots$

## Dreizigster Satz.

### § 343.

L. Es werden, wie vorhin, zwei Kreise, aus einem gemeinschaftlichen MittelPunkte C, beschrieben, und hierauf zwei HalbMesser, AC, BbC, des grossen Kreises, und einer, AC, des kleinen, gezogen; alles nach Willkühr. — Welches ist nun das Verhältniß der Winkel ACB und acb zu vier rechten Winkeln?




S.

S. $\angle ACB : 4\angle = AB : P$ ) (§ 212).
$\angle aCb : 4\angle = ab : p$ )

L. Recht! Wir wollen die letzte Proportion aber anders stellen.

$$\begin{array}{l} ACB : 4\angle = AB\triangle : P \\ 4\angle : aCb = p : ab \text{ (A. § 242)} \\ \hline \angle ACB : aCb = AP\times p : ab\times P \text{ (A. § 260)} \\ = AB\times\frac{Pr}{R} : ab\times P \text{ (§ 331)} \\ = AB\times\frac{r}{R} : ab \\ = \frac{AB}{R} : \frac{ab}{r} \text{ (A. § 235)} \end{array}$$

Was heisst das?

S. Winkel verhalten sich zu einander wie die Längen der Bögen, von denen sie gemessen werden, durch ihre HalbMesser dividirt.

L. Und da $\frac{AB}{R} : \frac{ba}{r} = AB\times r : ab \times R$ (A. § 235); wofür man auch schreiben kan $\left(\begin{array}{l} AB : ab \\ r : R \end{array}\right)$ (A. § 260); so lässt sich dieser Satz noch auf zweierlei Art ausdrücken:

S. $\angle ACB : \angle aCb = AB \times r : ab\times R$ heisst: Winkel verhalten sich wie die Längen der Bögen, von welchen sie gemessen werden, durch

die

die verwechselten HalbMesser multiplicirt. — Und

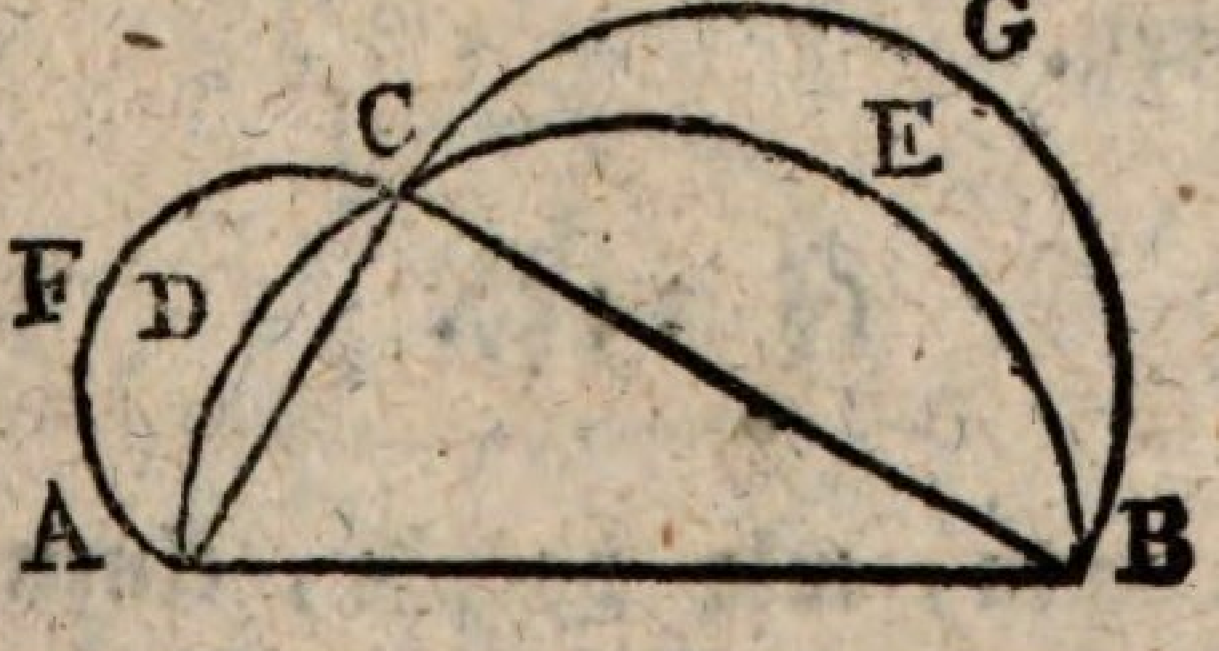
$$\angle ACB : \angle aCb = \begin{pmatrix} AB : ab \\ r : R \end{pmatrix}$$

heisst: das Verhältniß der Winkel ist aus den Längen der Bögen, die sie messen, und dem umgekehrten der HalbMesser zusammen gesetzt.

## Ein und dreizigster Satz.

### § 344.

L. Auf einer beliebigen Linie AB wird ein HalbKreis ADCEB gezeichnet. Von den EndPunkten A und B des DurchMessers werden, nach einem beliebigen Punkte C des Umfanges, gerade Linien AC, BC gezogen. So entsteht ein DreiEck ABC. Was für Eigenschaften hat das? Welchen Winkel bilden die Linien AC und BC?




S. Einen rechten (§ 199).

 L. Auf

L. Auf der längsten Seite dieses rechtwinkligen DreiEkks ABC steht schon ein HalbKreis ADCEB; auf den beiden kürzern wollen wir auch dergleichen beschreiben, und sie AFC, BGC nennen. — Wie verhält sich nun der HalbKreis der längsten Seite AB, zu den HalbKreisen der beiden kürzern AC und BC?

S. Der auf AB ist so groß als die auf AC und BC zusammen (§ 334).

L. Allein jeder dieser HalbKreise ist aus mehren Stükken zusammengesetzt, von welchen die zwischen zwei KreisBogen eingeschlossenen ADCFA und BECGB MondStükken, oder Luneln heissen. Wir müssen, der Deutlichkeit wegen, die ganzen, und die Teile eines jeden, herschreiben.

S. ⌓ ADCEBA + ⌓ AFCA + ⌓ BGCB

$$\frac{\text{ABC} + \underline{\text{ACDA}} + \underline{\text{BCEB}} = \text{ADCFA} + \underline{\text{ACDA}} + \text{BGCEB} + \underline{\text{BCEB}}}{\triangle\text{ABC} = \text{ADCFA} + \text{BGCEB}}$$ (§ 34)

L. Was bedeuten nun obige Zeichen?

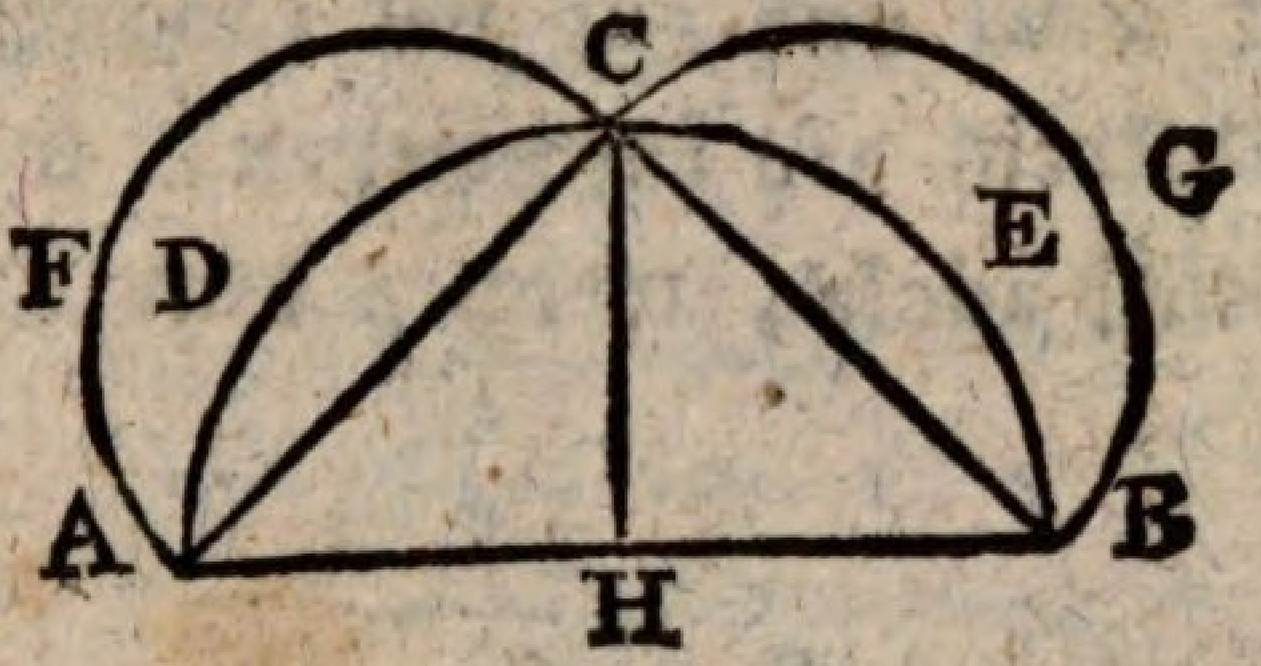
S. Ein in einem HalbKreise beschriebenes DreiEkk ist gleich den MondStükken seiner kürzern Seiten.

(§ 345).

L. Wenn man, wie vorhin, einen HalbKreis beschreibt, aber den Punkt C auf der Mitte des Umfanges annimt (§ 204); wie verhalten sich

dan

dan die Sehnen AC und BC, desgleichen die auf ihnen beschriebenen HalbKreise, ACFA und BCGB zu einander?



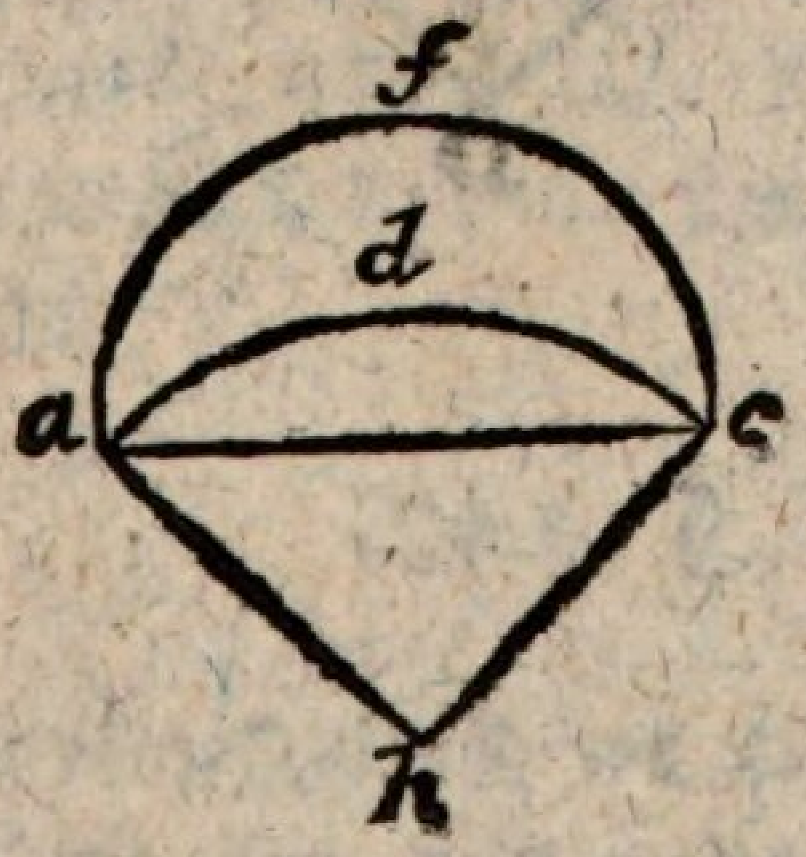

S. Die Sehnen sind gleich lang (§ 205) und die HalbKreise gleich groß (§ 13).

L. Und wenn man das DreiEkk ABC durch eine Linie CH in zwei gleiche Teile zerschneidet (§ 157); wie groß ist dan jede seiner Hälften?

S. Wenn die ganzen Grössen gleich sind (§ 344), so sind auch die Hälften gleich (§ 36).

Folglich △ ACH = ADCFA
△ BCH = BECGB

L. Jedes rechtwinklig-gleichschenklige DreiEkk also ist dem MondStükke seiner längsten Seite gleich: — Wie wird aber, wenn das DreiEkk

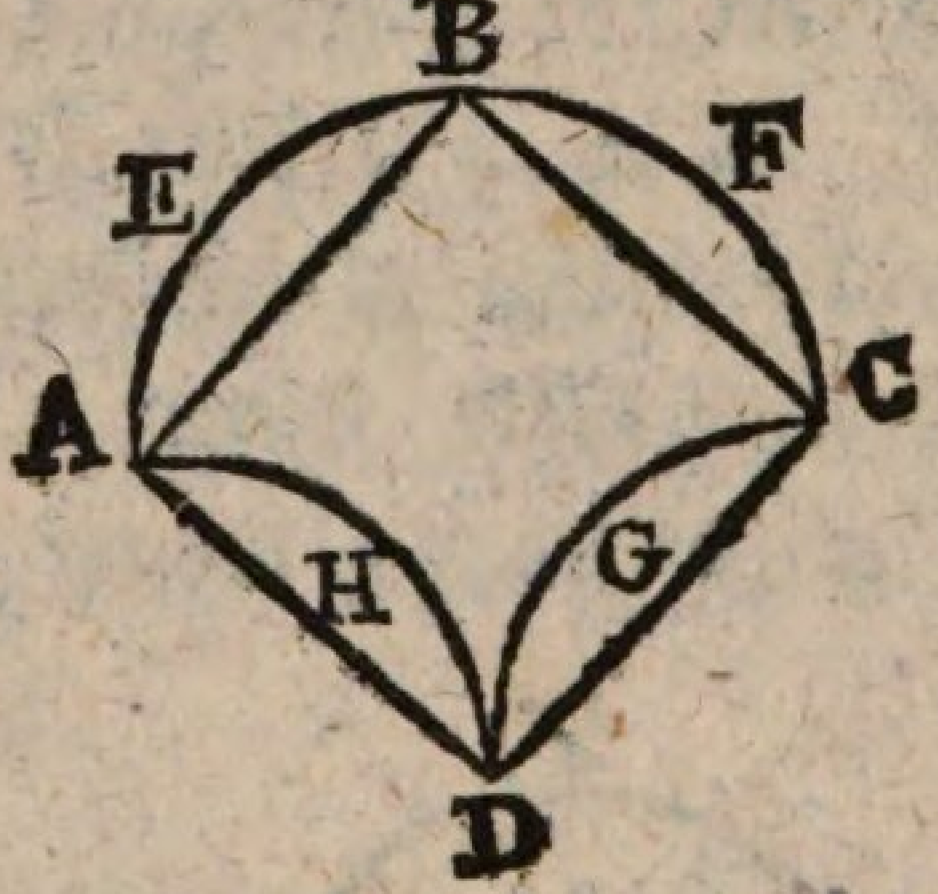


ach gegeben ist, das MondStükke, welches ihm gleich ist, beschrieben?

S. Aus der Spitze des rechten Winkels h wird der Quadrant adc und auf der långsten Seite ac wird der HalbKreis afc beschrieben, so ergiebt sich das MondStükk adcfa, welches dem DreiEkke ach gleich ist.

## § 346.

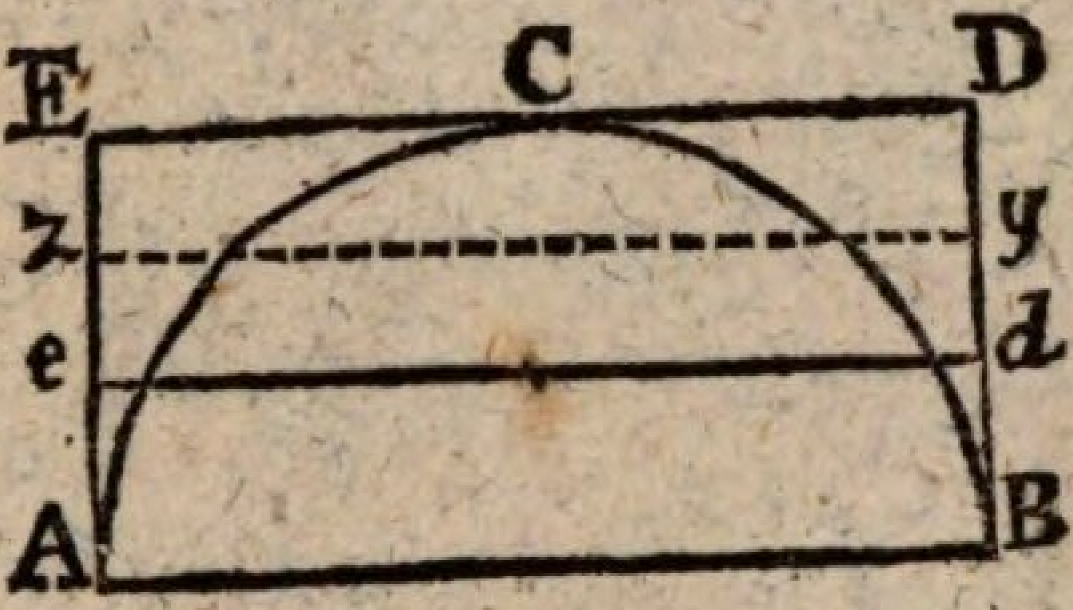
Die MondStükken oder MondSchnitte sind eine Erfindung des Hippokrates von Kos, weshalb sie auch hippokratische Luneln (lunulae Hipocratis) heissen. Sie können unter andern dienen die Möglichkeit der Quadratur krummliniger Figuren zu beweisen. Gleiches erhellt auch aus nebenstehender Figur AEBFCGDHA, welche dem Quadrate ABCD gleich ist, wie der blosse Anblikk zeigt.




## § 147.

Um die Möglichkeit der KreisQuadratur noch auf andre Art zu zeigen, wollen wir auf einer geraden Linie AB

AB einen HalbKreis ABCA beschreiben; an beiden Enden derselben senkrechte Linien AE, BD von der Länge des HalbMessers, errichten, und ihre EndPunkte durch eine gerade Linie ED verbinden. So entsteht ein Parallelogramm ABDE, welches grösser ist als der Halb-




Kreis ABCA. Rükkt man nun die Linie ED in Gedanken gegen AB herunter bis ed, wo sie ein Parallelogramm ABde, welches kleiner als der HalbKreis ist, bildet; so ist klar, daß sie auf diesem Wege über zwei Punkte, z und y, gegangen ist, wo sie ein Parallelogramm ABzy, gleich dem HalbKreise ABCA begrenzt hat. Wer diese Punkte nun anzugeben wüste, der hätte die Quadratur des Kreises erfunden. Hat nun gleich keine Akademie einen Preis darauf gesetzt, und kan man ihrer in der Ausübung auch entbehren, so kan ich doch nicht der Meinung des Generals von Tempelhof beitreten, daß sie keinen Dreier wert sey (v. Tempelhof Geom. § 338). Wenigstens würden Viele Unwissende, welche damit bisher ihre Köpfe zerbrochen, und ihre Zeit verschwendet haben, sich künftig nüzlicher beschäftigen lernen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Winterfeld, Moritz Adolph von

Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauch in Schulen und für Selbstlehrlinge

Bd.: 3

Braunschweig 1799

Math.u. 212 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594364-5
VD18 80065562-001